ПМТФ, № 4, 1987

УДК 532

РАЗВИТИЕ ГИДРОМЕХАНИКИ В СИБИРСКОМ ОТДЕЛЕНИИ АН СССР

Б. А. Луговцов, Л. В. Овсянников
(Новосибирск)

Круг проблем гидромеханики (механики жидкостей и газов), исследовавшихся сибирскими учеными, в значительной мере был очерчен интересами основателя Сибирского отделения — акад. М. А. Лаврентьева. В его научном наследии содержатся работы по теории поверхностных волн, гидродинамике струйных и отрывных течений, движению грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, перемещению твердых деформируемых тел в жидкости под действием внутренних усилий, гидродинамической теории кумуляции. Профессиональный математик, М. А. Лаврентьев поддерживал исследования по разработке новых математических методов аналитического и численного моделирования и анализа природных процессов. Как подлинный естествоиспытатель, он ставил сам и побуждал других ставить эксперименты, которые выявляли бы основные закономерности еще не до конца понятых явлений. Им высказано немало идей и предложений по новым постановкам задач гидромеханики, например, по моделированию метаемой взрывом массы грунта как несжимаемой идеальной жидкости, изучению структуры вихревых колец, объяснению «новороссийской боры», разрешению кажущихся парадоксов при несимметричном обтекании шара, новому механизму ветрового волнообразования, описанию течения жидкости в траншее на дне потока, проблеме цунами и т. п. Описание оригинальных постановок из разных разделов гидродинамики с подробным анализом определяющих явления физических факторов изложено в его монографии (совместно с Б. В. Шабатом) [1], впервые вышедшей в 1973 г.

Благодаря инициативе и усилиям М. А. Лаврентьева, его ближайших соратников, последователей и учеников гидромеханика в Сибирском отделении получила заметное развитие. Ее успехи признаны в международном масштабе и вполне законно составляют предмет гордости ученых-сибиряков. Краткому обзору их достижений в области гидромеханики на новом этапе и посвящена данная работа.

Групповой анализ дифференциальных уравнений. Наиболее распространенная форма математической модели движения жидкостей и газов состоит из дифференциальных уравнений и дополнительных условий. Важный этап изучения такой модели — качественный анализ, состоящий в выяснении ее корректности и отыскании достаточно широких классов частных решений. Последнее обычно является нетривиальным ввиду нелинейности уравнений гидромеханики.

Для решения проблемы отыскания частных решений оказалась плодотворной идея об использовании особых свойств симметрии дифференциальных уравнений, заключающихся в том, что уравнения допускают непрерывную группу преобразований совокупности независимых и зависимых переменных. Понятие допускаемой группы введено еще в трудах норвежского математика Софуса Ли в конце прошлого столетия. Однако после С. Ли его теория широкого применения в вопросах гидромеханики не получила.

Начиная с 1958 г. Л. В. Овсянниковым, а в дальнейшем его учениками проделана большая работа по «реанимации» творческого наследия С. Ли в направлении приложений теории непрерывных групп преобразований к проблемам математической физики вообще, в том числе и гидромеханики. Соответствующая область исследований получила название группового анализа дифференциальных уравнений. Основные итоги выполненной в этой области работы подведены в монографиях Л. В. Овсянникова [2] и Н. Х. Ибрагимова [3].

Были детально разработаны алгоритмы групповой классификации дифференциальных уравнений и построения классов инвариантных и частично инвариантных решений. Проведена групповая классификация уравнений нелинейной теплопроводности, идеальной несжимаемой жидкости, газовой динамики, уравнений Навье — Стокса, пограничного слоя, околозвуковых течений газа, других систем уравнений гидромеханики.

Для уравнений движения газа с уравнением состояния $p = A(S)\rho^{\gamma}$ в любой размерности n (физический смысл имеют значения $n = 1, 2, 3$), когда $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{u} \in R^n$,

$$(1) \qquad \rho_t + \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0, \; \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \; S_t + \mathbf{u}\cdot\nabla S = 0$$

найдены значения показателя адиабаты $\gamma = (n + 2)/n$, приводящие к расширению допускаемой группы [2] и новым законам сохранения [3] вида $\tau_t + \operatorname{div}(\tau\mathbf{u} + \xi) = 0$, где

$$\tau = t(\rho|\mathbf{u}|^2 + np) - \rho\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}; \; \xi = p(2t\mathbf{u} - \mathbf{x}).$$

Установлено свойство изэнтропичности решений типа двойных волн для системы (1) в случае $n = 2$. Для газодинамического уравнения С. А. Чаплыгина $\psi_{\sigma\sigma} + K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$ показано, что все его удачные аппроксимации, позволяющие эффективно решать краевые задачи, обусловлены максимальной широтой допускаемой группы [4].

Проблема отыскания частных решений дифференциальных уравнений получила рациональную групповую основу. Методы группового анализа оказались эффективными также для изучения краевых задач гидромеханики. Вопросы инвариантности решения задачи Коши, характеристик и сильных разрывов, в частности, инвариантного продолжения инвариантного решения системы (1) через ударную волну изучены В. М. Меньщиковым [5]. Исследование инвариантности задач со свободной границей для уравнений Навье — Стокса, выполненное В. В. Пухначевым [6], дало возможность найти решения ряда задач этого класса.

Дальнейшее развитие теории С. Ли в [3], связанное с разработкой аппарата групп Ли — Беклунда, привело к построению нетривиальных законов сохранения для ряда нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в жидкостях и газах. Другие многочисленные результаты, полученные методами группового анализа дифференциальных уравнений математической физики, содержатся в [2, 3] и в цитированной там журнальной литературе.

Движения со свободной границей. Этим термином выделяется класс таких движений жидкостей и газов, в которых часть границы движущейся массы «свободна», т. е. не является твердой непроницаемой стенкой, а определяется каким-то другим законом контактного взаимодействия с окружающей средой. Типичные примеры дают действие на свободную границу распределенного давления или контакт наблюдаемой массы с другой жидкостью. Движения со свободной границей широко распространены в природе. К ним относятся струйные и кавитационные течения, волновые движения на поверхности и в глубинах стратифицированного океана, свободные движения конечных масс жидкости при ее метании и т. п. В соответствующих задачах гидромеханики появляется новый искомый элемент — сама область определения решения (фактически — ее граница).

Существенно различаются стационарные (установившиеся) и нестационарные (неустановившиеся) движения жидкости со свободной границей. Первые имеют большую историю многих плодотворных исследований в точной постановке в трудах Эйлера, Кирхгофа, С. А. Чаплыгина, А. И. Некрасова, М. А. Лаврентьева и других выдающихся ученых. В то же время для нестационарных движений этого вида до работ сибирских ученых фактически в точной постановке результатов не было. Поэтому развитие соответствующей точной теории нестационарных движений со свободной границей вполне можно отнести к числу крупных достижений сибирской науки.

Рассматриваются потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей Γ_t, ограничивающей неизвестную область $\Omega_t \in R^3(\mathbf{x})$ (индекс t подчеркивает зависимость от времени), происходящие в поле массовых сил с потенциалом G и постоянным давлением на Γ_t. Потенциал скоростей $\Phi(t, \mathbf{x})$ должен быть гармонической функцией в Ω_t и удовлетворять при $\mathbf{x} = \mathbf{X} \in \Gamma_t$ кинематическому и динамическому условиям

$$\mathbf{X}_t = \nabla\Phi, \; 2\Phi_t + |\nabla\Phi|^2 = 2G. \tag{2}$$

К уравнениям (2) добавляются начальные данные

$$\mathbf{X}|_{t=0} = \mathbf{X}_0, \; \Phi|_{t=0} = \Phi_0, \tag{3}$$

где функция Φ_0 гармоническая в известной области Ω_0 с границей Γ_0, на которой $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$. Векторные условия в (2) и (3) фактически сводятся к скалярным, так как Γ_t может быть задана одним уравнением в $R^3(\mathbf{x})$.

Трудности анализа задачи (2), (3) обусловлены ее очевидной нелинейностью, а также нелокальностью. Последняя вытекает из зависимости значения $\nabla\Phi$ в каждой точке Γ_t от всех значений самого потенциала Φ на Γ_t. Эти обстоятельства приводят к тому, что задача (2), (3) «не умещается» в каком-либо из обычных банаховых пространств ввиду непрерывной потери гладкости решения по мере возрастания времени t. Для преодоления указанных трудностей потребовалось разработать новый математический аппарат.

Исходной явилась работа Л. В. Овсянникова [7], в которой впервые обнаружена возможность решения линейных нелокальных задач Коши на основе нового понятия сингулярного оператора в шкале банаховых пространств. На модельных постановках им же было показано [8], что задача со свободной границей может быть корректно поставлена в классах аналитических функций. В [8] также получена априорная оценка для малых возмущений произвольного решения задачи (2), (3) и доказана единственность решения соответствующей линеаризованной задачи.

Следующий шаг сделан В. И. Налимовым [9], впервые доказавшим разрешимость (в малом по t) нелинейной задачи Коши — Пуассона о волнах на воде, в которой $G = -gy$, а Ω_t ограничена непроницаемой стенкой $y = 0$ (дно) и свободной границей $y = h(t, x) > 0$ (плоская задача). Существование решения установлено в классах аналитических функций путем уточнения шаудеровских оценок производных любого порядка на границе области и использования результатов [7].

Обоснование приближений в теории волн. Техника анализа задач со свободной границей в классах аналитических функций усовершенствована Л. В. Овсянниковым [10] на основе понятия квазидифференциального оператора в шкале банаховых пространств. Это позволило существенно упростить доказательство разрешимости таких задач и дать строгое обоснование используемых в приложениях теории волновых движений жидкости приближений, таких как линейное, «мелкой воды» и т. п.

Понятие строгого обоснования приближения относится к задачам, в формулировку которых входит (или вводится) параметр ε, причем приближенная постановка получается при формальном переходе $\varepsilon \to 0$. В этой ситуации решение исходной задачи есть, скажем, $u(\varepsilon)$ и требуется оценить его отклонение от решения $u(0)$ задачи в приближенной постановке. Например, для обоснования линейной теории, когда решение представлено в виде $u(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1(\varepsilon)$, где u_0 — основное точное решение, не зависящее от ε, а $\varepsilon u_1(0)$ — его линейное возмущение, требуется доказать, что $u_1(\varepsilon) - u_1(0)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. В теории «мелкой воды», дающей широко используемое приближение в задаче Коши — Пуассона, искомыми являются h и φ (глубина жидкости и значение потенциала скоростей на свободной границе). В представлении решения $h(\varepsilon) = \varepsilon h_1(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\varphi_1(\varepsilon)$ функции $h_1(0)$, $\varphi_1(0)$ удовлетворяют уравнениям «мелкой воды». Здесь требуется оценить в зависимости от ε отклонение

$$\delta = \|h_1(\varepsilon) - h_1(0)\| + \|\nabla\varphi_1(\varepsilon) - \nabla\varphi_1(0)\| \tag{4}$$

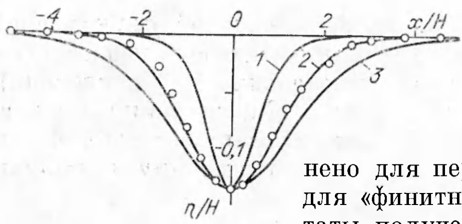

Рис. 1

при условии, что начальные данные в задачах Коши — Пуассона для $(h_1(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon))$ и $(h_1(0), \varphi_1(0))$ одинаковы.

Впервые строгое обоснование теории «мелкой воды» было выполнено для периодических волн [11], а затем и для «финитных» волн в плоской задаче. Результаты получены в шкале банаховых пространств аналитических функций, когда, например, норма функции $u(x)$ определяется через ее преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi)$ формулой

$$\|u\|_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} |\widehat{u}(\xi)| \, d\xi \quad (\rho > 0). \tag{5}$$

Аналогичные результаты получены Н. И. Макаренко [12] в задачах о движениях двухслойной жидкости и о трехмерных волнах. Во всех упомянутых случаях с нормой вида (5) для величины (4) найдена оценка $\delta < C\varepsilon$ (константа C не зависит от ε).

Новый подход к теории волн Коши — Пуассона в плоской задаче развит В. И. Налимовым [13]. На основе разработанной им тонкой техники оценок нелинейных псевдодифференциальных операторов доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши — Пуассона в классах функций конечной гладкости и в классах Жеврея и дано строгое обоснование линейной теории. Дальнейшее развитие этой техники привело также к обоснованию теории «мелкой воды» в классах функций конечной гладкости с несколько более слабой оценкой $\delta < C\varepsilon^{1/2}$ отклонения (4).

Общий итог выполненной работы по обоснованию приближенных теорий волн заключается не только в том, что эти приближения получили надежную теоретическую основу, но также и в новом развитом аналитическом аппарате, который может быть использован для исследования других аналогичных задач. Упомянутые в этом разделе результаты подробно изложены в [14].

Развитая в [14] теория второго приближения, дающая простые конечные формулы для основных параметров уединенных волн и гладких боров в двухслойной жидкости под крышкой, была подвергнута экспериментальной проверке в опытах В. И. Букреева и Н. В. Гаврилова [15, 16]. На рис. 1 показано сравнение профиля солитона, рассчитанного по этой теории (линия *2*), с экспериментальными данными (кружки), полученными при относительной глубине нижнего слоя 0,737 и отношении плотностей 0,8. Для этих условий теоретическое значение скорости распространения волны есть 15,1 см/с, а экспериментальное значение равно 14,9 ± 0,3 см/с. На рис. 1 показаны также профили солитона, рассчитанного для тех же исходных данных по теории T. Kakutani, N. Jamasaki (J. Phys. Soc. of Japan, 1978, v. 45, N 2), использовавших уравнение Кортевега-де Вриза (линия *1*, скорость волны 16,1 см/с), и по теории G. H. Keulegan (J. Res. of the Nat. Bur. of Stand., 1953, v. 51, N 3) (линия *3*, скорость волны 15,4 см/с).

Стационарные течения со свободными границами. Этот обширный и богатый классическими результатами раздел гидромеханики также пополнился новыми крупными достижениями. В обзорной статье [17], где одним из соавторов является М. А. Лаврентьев, указаны четыре проблемы, которые авторы обзора считали «основными в теории волн». В настоящее время по всем этим проблемам получено существенное продвижение. Об одной из них — создании теории неустановившихся волн — уже сказано выше.

Вторая проблема связана с отсутствием строгой теории пространственных течений со свободной границей. Здесь первый принципиальный шаг сделан П. И. Плотниковым [18]: в точной постановке доказано существование трехмерной двоякопериодической системы волн на поверхности потока жидкости конечной глубины. Решения соответствующей линейной задачи, пропорциональные $\exp i(\omega nx + my)$, описываются дисперсионным соотношением

$$\omega^2 n^2 = \lambda k \operatorname{th}(h_0 k), \quad k = \sqrt{\omega^2 n^2 + m^2}, \tag{6}$$

где n, m — целые числа; h_0 — глубина невозмущенного потока со скоростью u_0 в направлении оси x; ω — отношение периодов по осям y и x; $\lambda = h_0^{-1}\,\mathrm{Fr}^{-2}$ с числом Фруда $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0}$ (сила тяжести действует по оси z).

Главная трудность в решении пространственной нелинейной задачи обусловлена ее принципиальным отличием от плоской: множество значений λ, получаемых из (6), при всевозможных целых парах (n, m) всюду плотно на положительной полуоси (непрерывный спектр). Тем не менее П. И. Плотникову удалось доказать существование однопараметрического семейства решений нелинейной задачи (с параметром ε), в котором глубина жидкости имеет представление

$$h(\varepsilon, x, y) = h_0 + \varepsilon \cos \omega nx \cdot \cos my + \varepsilon\eta(\varepsilon, x, y)$$

с оценкой $\|\eta\| < C\varepsilon$. Результат получен путем применения видоизмененной теоремы Нэша — Мозера, дающей специальный алгоритм итераций в виде комбинаций метода Ньютона со сглаживанием последовательных приближений в шкалах банаховых пространств двоякопериодических функций конечной гладкости.

Третья проблема относилась к плоским волнам максимальной (предельной) амплитуды, для которых еще Стокс вывел угол наклона 30° в вершине волны, и так как он сделал это нестрого, то было принято говорить о гипотезе Стокса. Хотя существование волн максимальной амплитуды установлено английским математиком Толандом в 1978 г., гипотеза Стокса оставалась открытой. П. И. Плотников [19] с помощью тонкого анализа аналитического продолжения решения через свободную границу уточнил результат Толанда и окончательно доказал справедливость гипотезы Стокса.

Наконец, в четвертой проблеме говорилось о принципиальных трудностях анализа течений над неровным дном при числах Фруда, меньших единицы. Одна из плоских задач этого класса решена В. И. Налимовым [20]. Им изучена бифуркация течения жидкости со скоростью u_0 и глубиной h_0 над дном с уравнением $y = \varepsilon h(x)$ с достаточно гладкой и быстро убывающей при $|x| \to \infty$ функцией $h(x)$ и малым параметром ε в предположении, что число Фруда $u_0/\sqrt{gh_0} < 1$. Доказано существование решения, которое при $x \to -\infty$ выходит на равномерный поток, текущий со скоростью u_0, а при $x \to +\infty$ ведет себя как периодическая волна с периодом $2\pi/\omega$, определяемым линейной теорией. Принципиальный момент теории В. И. Налимова состоит в однозначном разложении искомой функции $u(x)$ на две компоненты

$$u = u^0 + \theta u^+, \tag{7}$$

где $u^0(x)$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$, $u^+(x)$ есть $2\pi/\omega$-периодическая функция, а стандартный множитель $\theta(x) \in C_\infty$ равен нулю при $x < 0$ и единице при $x > 1$. В доказательстве использована специальная нормировка функций вида (7) в шкалах банаховых пространств функций конечной гладкости и развитая техника псевдодифференциальных операторов.

В этом результате вызывает интерес дополнительное условие: преобразование Фурье производной $h'(x)$ должно удовлетворять неравенству $\widehat{h'}(\omega) \neq 0$. Вопрос о том, имеет ли это условие какой-нибудь физический смысл и насколько оно вообще необходимо, пока остается открытым.

Стационарные задачи газовой динамики послужили М. А. Лаврентьеву моделью при создании математической теории квазиконформных отображений [21]. Плоские ($k = 0$) и осесимметричные ($k = 1$) потенциаль-

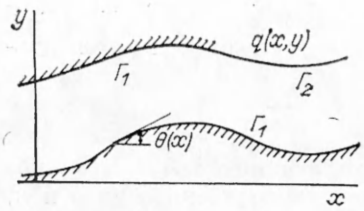

Рис. 2

ные течения газа описываются нелинейной системой уравнений для потенциала скоростей $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$:

(8) $$y^k\rho\varphi_x = \psi_y,\ y^k\rho\varphi_y = -\psi_x.$$

С модулем скорости $q = |\nabla\varphi|$ и плотностью $\rho = \rho(q)$ тип системы (8) определяется знаком величины $d(q\rho)/dq = \rho c^{-2}(q^2 - c^2)$, где c — скорость звука: эллиптический при $q < c$ и гиперболический при $q > c$. Широкий класс краевых задач для системы (8) связан с условиями на границе Γ, состоящей из заданных непротекаемых стенок Γ_1 и свободных границ Γ_2 (рис. 2):

(9) $$\partial\varphi/\partial n|_\Gamma = 0,\quad \varphi_y/\varphi_x|_{\Gamma_1} = \operatorname{tg}\theta(x),\quad q|_{\Gamma_2} = q(x, y).$$

Ведущая идея М. А. Лаврентьева состояла в том, что решения эллиптической системы (8) осуществляют квазиконформное отображение плоскости (x, y) на плоскость (φ, ψ). Им была решена плоская задача о дозвуковом потенциальном течении газа в канале с криволинейными стенками.

На основе надлежащего развития теории квазиконформных отображений В. Н. Монахов [22] доказал разрешимость ряда плоских строго эллиптических задач (8), (9). Обобщения этих результатов на двухсвязные области, полученные С. Н. Антонцевым, и на вихревые течения несжимаемой жидкости, полученные П. И. Плотниковым, также изложены в [22]. Изучение осесимметричных течений того же типа начато П. И. Плотниковым [23]. Для газовых течений С. Н. Антонцев [24] впервые доказал, что при точно звуковой скорости на свободной границе осесимметричная струя выравнивается на конечном расстоянии.

Линейные волны. Основу линейной теории волн составляют методы фурье-анализа и дисперсионные соотношения. Последние находятся в явном виде (см., например, (6)) лишь в простейших случаях. Любые неоднородности, вроде исходной стратификации или неровности дна, приводят к сложным спектральным задачам. Возникающие при этом трудности особенно характерны для наиболее интересных и практически актуальных проблем распространения пространственных волн. Поэтому в линейной теории получили большое распространение различные асимптотические приближения типа стационарной фазы, длинно- и коротковолновые асимптотики и т. п. В целом линейная теория волн образует обширное направление, в котором ежегодно публикуются сотни работ. Институтом гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР начиная с 1972 г. периодически издаются аннотированные библиографические указатели [25—27], которые отражают вклад в развитие этого направления сибирских ученых. Два результата более подробно освещаются ниже.

Задачу о волноводе, поставленную М. А. Лаврентьевым в связи с проблемой цунами, решил Р. М. Гарипов [28] (в приближенной постановке вопрос изучался также в [29]). Рассматривается линейный вариант задачи Коши — Пуассона (2), (3) о волнах, распространяющихся в безграничном слое однородной жидкости $-1 + \varepsilon h(x) < z < 0$ с функцией $h(x) \geqslant 0$, отличной от нуля лишь в некотором конечном интервале, и малым параметром $\varepsilon > 0$. Здесь геометрическая форма дна $z = -1 + \varepsilon h(x)$ имеет вид «подводного хребта» — цилиндрического возвышения, идущего вдоль оси y. С потенциалом скоростей Φ для значений $\varphi = \Phi$ на свободной поверхности $z = 0$ получается задача Коши

$$\varphi_{tt} + K\varphi = 0,\ \varphi|_{t=0} = f_0,\ \varphi_t|_{t=0} = f_1,$$

где оператор $K\varphi = \Phi_z|_{z=0}$ содержит в себе всю информацию о геометрии области. Форма волны определяется равенством $\zeta = -\varphi_t$. В представлении $K = K_0 + \varepsilon k$ оператор K_0 соответствует плоскому дну $z = -1$, а малый добавок εk зависит от формы дна, т. е. от функции $h(x)$ и параметра ε.

Преобразование Лапласа по t приводит к исследованию резольвенты оператора K, имеющего как дискретный, так и непрерывный спектр. Наиболее полно эта проблема изучена Р. М. Гариповым в работе [30], где рассмотрено спектральное представление $\theta(\sigma, \nu) = \sqrt{\sigma^2 + \nu^2}\, \mathrm{th} \sqrt{\sigma^2 + \nu^2}$ оператора K_0, которое как аналитическое отображение комплексной плоскости $\sigma \to \theta$ (при фиксированном ν) является двулистным. Поэтому резольвента оператора K_0 аналитически продолжается на двулистную риманову поверхность с точкой ветвления $\theta_0 = \nu\, \mathrm{th}\, \nu > 0$. Оказывается, что если площадь $S = \int h(x)dx$ положительна, то на первом листе римановой поверхности существует изолированное собственное значение λ_1 оператора K, причем $0 < \lambda_1 < \theta_0$. Соответствующее решение затухает при распространении вдоль хребта по закону $t^{-\gamma}$, где γ определяется величиной S и принимает одно из значений 1/2, 1/3, 1/4 в отличие от плоского дна, когда закон затухания есть t^{-1}. Тем самым доказано, что подводный хребет может быть волноводом для поверхностных волн.

Результаты И. В. Стуровой [14] связаны с исследованием поверхностных и внутренних волн, возникающих в стратифицированной по плотности жидкости при различных способах возмущения. Сравнение асимптотических картин волн, возникающих при равномерном горизонтальном движении тела и при сжатии зоны смешения [31], показало, что (при наличии скачка плотности) во втором случае внутренние волны практически не искажают поверхность раздела и не проникают выше скачка плотности. Установлено также, что при наложении на поступательное движение тела дополнительных колебаний возможно возбуждение волн перед телом и резкое увеличение волновых амплитуд на некоторых частотах колебаний тела. Обнаружен эффект уменьшения волнового сопротивления продольно колеблющегося тела по сравнению с его чисто поступательным движением.

Течения вязкой жидкости со свободными границами. Цикл задач со свободными границами для уравнений Навье — Стокса в точной постановке рассмотрен В. В. Пухначевым [32, 33]. Учет поверхностного натяжения σ вводит в уравнения, наряду с числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = Vl/\nu$, второй критерий подобия — число Вебера $\mathrm{We} = \rho V^2 l/\sigma$, значения которого определяют бифуркационные режимы течения. Решены задачи о движении жидкой пленки, покрывающей поверхность горизонтального вращающегося кругового цилиндра в поле тяжести, и о формах равновесия невесомой капиллярной жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость и вращающейся вместе с цилиндром вокруг его оси с постоянной угловой скоростью [34].

Приближенные модели волнообразования в стекающих пленках вязкой жидкости подробно изложены в монографии В. Е. Накорякова с соавторами [35]. В точной постановке эта задача впервые решена В. В. Пухначевым [36], доказавшим существование катящихся волн как бифуркационного движения типа бегущей волны на фоне основного плоского течения с прямолинейными траекториями и полупараболическим профилем скорости. Однопараметрическое семейство решений существует при любом числе Вебера и достаточно малом числе Рейнольдса.

Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами рассмотрел В. О. Бытев [37]. Оказалось, что при отсутствии поверхностного натяжения внутренний радиус кольца неограниченно возрастает, причем в зависимости от начального распределения окружной скорости либо линейно по времени t (как для кольца идеальной жидкости), либо по закону $t^{1/2}$. Совершенно иначе ведет себя вращающееся кольцо при учете поверхностного натяжения. Здесь характерный параметр β (число Вебера) определяется начальными данными через момент импульса и площадь кольца. В работе О. М. Лаврентьевой [38] доказано существование критического значения $\beta_* \cong 5{,}17$, разделяющего различные режимы установившегося движения: при $\beta > \beta_*$ есть два стационарных решения, при $\beta = \beta_*$ — одно, а при $\beta < \beta_*$ таких решений нет. Для неустановившихся движений с $\beta \geqslant \beta_*$ или при $t \to \infty$ решение стремится к стационарному, либо за конечное время кольцо превращается в круг. Доказаны существование и единственность соответствующего обобщенного решения уравнений Навье — Стокса. Тем самым установлено, что в данном описании процесс перехода кольца в круг носит необратимый характер.

Явления в пограничном слое неравномерно нагретой жидкости связаны с зависимостью поверхностного натяжения от температуры. Интенсивность такого погранслойного течения определяется числом Марангони $\mathrm{Ma} = l\sigma_T \Delta T/\rho\nu^2$, где σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения, а ΔT — характерный перепад температуры. Асимптотическое упрощение задачи при $\mathrm{Ma} \to \infty$ приводит к неклассической краевой задаче для системы уравнений Прандтля: вместо условия прилипания на твердой стенке задается касательное напряжение на свободной границе. Первые результаты исследования двумерной нестационарной задачи для уравнений, описывающих пограничные слои Марангони, принадлежат В. В. Пухначеву [39]. На основе развитой теории В. В. Кузнецовым [40] разработана асимптотическая схема расчета термокапиллярной конвекции в столбе жидкости, боковая поверхность которого свободна, а на плоских торцах заданы постоянные (различные) значения температуры.

Вклад в теорию пограничного слоя Прандтля сделан Н. В. Хуспутдиновой [41], указавшей достаточные условия существования «в целом» двумерного стационарного пограничного слоя при возрастании давления вниз по потоку.

Движение по инерции конечной массы жидкости. Разработка идеи М. А. Лаврентьева [42] о моделировании движения метаемой с помощью взрыва массы грунта как движения идеальной несжимаемой жидкости привела к постановке вопроса об устойчивости движения конечной массы жидкости со свободной границей. Этот вопрос имеет смысл, если известно точное решение уравнений Эйлера, определенное в интервале времени $0 \leqslant t < \infty$. Такие решения существуют, например, в классе движений с линейным по координатам полем скоростей [43]. В частности, они описывают движения жидких эллипсоидов и приводят к лагранжевой динамической системе на многообразии [44]. Анализ устойчивости, выполненный В. В. Пухначевым и В. К. Андреевым, показал, что движения эллипсоидов устойчивы в интегральных нормах, но неустойчивы в равномерной метрике ввиду возможности образования длинных «усов», локализованных в узких областях свободной границы [45].

В общем случае потенциального движения массы жидкости, имеющей объем V, плотность ρ и кинетическую энергию K, диаметр жидкой массы $d(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, В. И. Налимов и В. В. Пухначев [46] получили асимптотическую оценку

$$d(t) \geqslant 2(K/\rho V)^{1/2}(t + O(1)).$$

Аналогичный результат справедлив и для вихревых движений, если мера завихренности $|\operatorname{rot} \mathbf{v}|\,[D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v})]^{-1/2}$ с тензором скоростей деформаций $D(\mathbf{v})$ поля скоростей $\mathbf{v}$ равномерно ограничена единицей. Сильно завихренные движения жидкого объема могут быть компактными при всех t. В. В. Пухначевым [47] найдено семейство вращательно-симметричных стационарных движений конечной массы жидкости с торовидной свободной поверхностью — гидродинамический аналог замкнутых плазменных конфигураций.

Пространственные ударно-волновые взаимодействия. Обобщение классических результатов по распространению и взаимодействию сильных разрывов в одномерных движениях газа на пространственные движения связано с необходимостью учитывать возможную криволинейную форму фронта. Исследования в этой области начаты В. М. Тешуковым [48], впервые установившим существование кусочно-аналитических решений для всех возможных конфигураций, возникающих при распаде произвольного разрыва (первого рода) на заданной аналитической поверхности. Им также решена общая задача о регулярном взаимодействии двух криволинейных ударных волн, распространяющихся в пространстве $R^3(\mathbf{x})$ [49].

Пусть Γ_t есть линия пересечения падающих фронтов ударных волн в момент времени t (рис. 3), v_{n1} и v_{n2} — нормальные скорости распространения фронтов относительно газа. Тогда относительная нормальная скорость $\mathbf{w}$ распространения кривой Γ_t определяется формулой

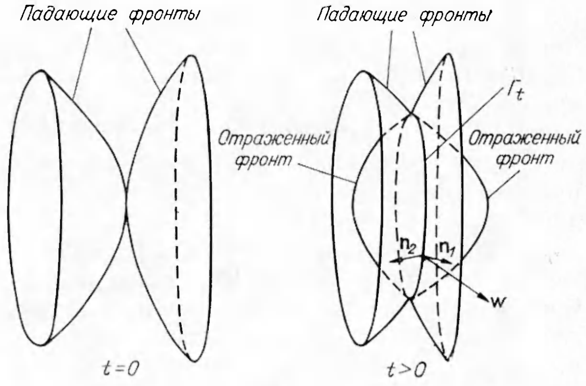

Рис. 3

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|^2} v_{n1} + \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|^2} v_{n2},$$

где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — орты нормалей к падающим фронтам. В начальный момент $t = 0$ первого контакта фронтов $|\mathbf{w}| = \infty$. Доказано существование кусочно-аналитического решения задачи о взаимодействии в интервале времени, определяемом неравенством $|\mathbf{w}| > c$ — скорости звука за отраженными фронтами. При $t > 0$ стадия регулярного взаимодействия всегда однозначно описывается «слабым» отраженным скачком в отличие от стационарного косого отражения, где возникает вопрос о выборе одного из возможных скачков — «слабого» или «сильного».

Закономерности распространения ударной волны по заданному фону (состоянию перед волной) были изучены А. М. Блохиным [50]. Для естественной постановки начально-краевой задачи доказано существование решения в классах функций конечной гладкости и получены оценки, из которых следует устойчивость ударной волны.

Гидравлические процессы. Это общее название объединяет исследования по математическому моделированию и расчету неустановившихся движений жидкости в открытых руслах, каналах и трубопроводах. Работа в этом актуальном прикладном направлении организована О. Ф. Васильевым. На основе классических моделей Сен-Венана и Буссинеска с использованием методов С. А. Христиановича, В. А. Архангельского и С. К. Годунова рядом авторов разработаны эффективные алгоритмы и созданы пакеты прикладных программ для гидравлических расчетов паводков в крупных реках, движений непрерывной волны при разрушении плотины, течений в сложных системах русел — с кольцами и разветвлениями, явлений гидравлического удара в системах трубопроводов. Качественное описание полученных в этом направлении результатов дано в [51, 52], где также содержится полный список опубликованных работ.

Принципиальный вклад в эту область относится к созданию расчетных методов для разветвленных одномерных гидравлических систем. Здесь возникают краевые задачи нового типа для систем дифференциальных уравнений с частными производными, заданных на комплексах (графах). Проблема состоит в учете топологической структуры комплекса при формулировке согласованных граничных условий в вершинах примыкающих друг к другу ребер, обеспечивающих корректность постановки задачи на комплексе в целом. Для докритических течений в системах речных русел, образующих комплекс типа «дерево», решение дано А. А. Атавиным [53]. В монографии А. Ф. Воеводина и С. М. Шугрина [54] описано решение этой проблемы для ряда конкретных задач, например явлений гидроудара, неустановившихся движений газа в системе трубопроводов и т. п. В общем виде указанная проблема в настоящее время, по-видимому, еще далека от ее полного решения.

Фильтрационные течения. Начало исследованиям по теории фильтрации было положено П. Я. Кочиной. По ее инициативе развернулась работа в области математического моделирования процессов влаго- и солепереноса в почвогрунтах при мелиорировании земель. Изучались такие явления, как образование линз пресных вод над солеными, совместное движение грунтовых и поверхностных вод, неустановившийся влагосолеперенос в зоне аэрации, течения при дренаже, соленакопление в корнеобитаемом слое почвы и т. п. Некоторые итоги этой работы подведены в [55]. Следующий этап развития теории фильтрации с учетом сложных гидрогеологических условий и других практически важных факторов, связанный со всесторонней апробацией используемых математических моделей — от установления корректности постановок краевых задач до создания программ и выполнения конкретных расчетов, освещен в монографии С. Н. Антонцева с соавторами [56].

Вопросы установившейся фильтрации приводят к задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Одна из практических задач состоит в определении фильтрационных потоков в однородном почвенном слое, идущих из системы каналов к заложенным между ними дренам при наличии инфильтрации или испарения со свободной поверхности. В случае плоской периодической системы каналов и дрен решение линейной задачи методом конформного отображения нашел В. Н. Эмих [57]. Для анализа нелинейных процессов потребовались более сильные методы созданной М. А. Лаврентьевым теории квазиконформных отображений. Развитие этой теории содержится в монографии В. Н. Монахова [22], где, в частности, рассмотрены проблемы нелинейной фильтрации и установлена корректность постановок основных нелинейных краевых задач.

Изучение явлений фильтрации несмешивающихся жидкостей актуально в связи с проблемой повышения нефтегазоотдачи пластов. С этой целью была подвергнута всестороннему анализу известная модель Маскета — Леверетта, состоящая из уравнений неразрывности и законов Дарси для каждой компоненты с учетом капиллярного давления на границе раздела фаз. Первые результаты по линейному варианту этой модели и ее численной реализации принадлежат А. П. Коновалову [58]. Полный анализ корректности постановок основных краевых задач, который привел к выявлению необычных эффектов, выполнен В. Н. Монаховым и С. Н. Антонцевым [59].

Исходная модель редуцирована к квазилинейной системе для «приведенных» давления $p(\mathbf{x}, t)$ и насыщенности $s(\mathbf{x}, t)$

$$ms_t = \operatorname{div}(K_0 a\nabla s + K_1\nabla p + \mathbf{f}_0), \quad \operatorname{div}(K\nabla p + \mathbf{f}) = 0 \tag{10}$$

с заданными пористостью среды $m(\mathbf{x}) > 0$, симметричным положительно определенным тензором фильтрации для однородной жидкости $K_0(\mathbf{x})$, тензорами фазовой проницаемости $K_1 = k_{01}K_0$, $K = kK_0$ и функциями $a(s)$, $k_{01}(s)$, $k(s)$, $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, s)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, s)$. Граничные условия для системы (10) задаются на непроницаемых поверхностях, а также на границах скважин и контактах с неподвижной жидкостью. Для насыщенности задается начальное значение $s(\mathbf{x}, 0)$. Специфика задачи двухфазной фильтрации в этой постановке состоит в том, что насыщенность должна удовлетворять неравенствам $0 \leqslant s \leqslant 1$, причем при $s = 0$ (или $s = 1$) происходит вырождение системы (10), когда одновременно $k_{10}(0) = 0$ и либо $a(0) = 0$, либо $a(0) = \infty$.

В [59] приведено доказательство того, что для решений справедлив принцип максимума, утверждающий выполнение неравенств $0 \leqslant s \leqslant 1$, а при некоторых дополнительных условиях — неравенств $\delta \leqslant s \leqslant 1 - \delta$ с постоянным $\delta > 0$. Установлены также следующие свойства решений: при вырождении $a(0) = 0$ скорость распространения возмущений от начальных данных оказывается конечной, а при $a(0) = \infty$ за конечное время происходит стабилизация решения к $s = 0$ по всей области его определения. Другими словами, несмотря на общий диффузионный характер процесса фильтрации, в указанных случаях область чистой фазы заполняется смесью путем распространения некоторого фронта с конечной скоростью или за конечное время происходит очищение всей области от одной из фаз.

Стационарные вихрепотенциальные течения. Наблюдения показывают, что вблизи плохо обтекаемого тела, уступа и углубления на дне возникают области, в которых движение жидкости происходит по замкнутым траекториям. М. А. Лаврентьев в начале 60-х годов предложил следующую схему двумерных течений этого типа в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости: в циркуляционной зоне движение происходит с постоянной завихренностью, вне нее является потенциальным, а поле скоростей всюду непрерывно. Работы этого направления подробно освещены в [1].

Возникающие в модели нелинейные задачи «о склейке» потенциального и вихревого течений были предметом ряда исследований [60—62], в итоге которых выяснилось, что в отдельных случаях удается доказать существование решения. Вместе с тем выполненные примеры численного расчета показали, что задача «о склейке» может иметь более одного решения — проблема единственности до настоящего времени остается открытой.

Вихревые кольца. Когда конечному объему, составляющему часть безграничной вязкой жидкости, импульсивно сообщается постоянная скорость, то по прошествии некоторого времени движение принимает форму распространяющегося в жидкости вихревого кольца. Количественное описание этого явления представляет одну из сложных и актуальных проблем гидромеханики.

По предложению С. А. Христиановича в Сибирском отделении А. Т. Онуфриевым [63] выполнено теоретическое исследование процесса всплывания в атмосфере похожего на вихревое кольцо характерного грибовидного облака, возникающего при мощных взрывах. Учитывались действие выталкивающей силы на облако нагретого газа, неоднородность атмосферы по высоте и турбулентный характер движения. На основе законов сохранения и ряда эмпирических закономерностей построена математическая модель этого явления в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение определило размеры всплывающего кольца и высоту подъема в зависимости от времени при хорошем согласовании с экспериментальными данными.

М. А. Лаврентьев обратил внимание на два существенных свойства вихревых колец: сравнительно малое сопротивление движению и способность переносить примесь. По его инициативе проведены многочисленные эксперименты с целью определения структуры и параметров движения вихревых колец. В экспериментах Д. Г. Ахметова и О. П. Кисарова [64] выполнены измерения поля скоростей в вихревых кольцах. А. А. Луговцов, Б. А. Луговцов и В. Ф. Тарасов [65] исследовали закон движения вихревых колец при различных способах их формирования в диапазонах начальных радиусов 1—200 см, скоростей 0,1—100 м/с и чисел Рейнольдса 10^3—10^7.

Анализ результатов экспериментов приводит к следующим выводам. При числе Рейнольдса $> 10^4$ движение жидкости в кольце турбулентное. По завершении стадии формирования кольца его радиус $R(t)$ растет в зависимости от пройденного расстояния $L(t)$ линейно:

$$R(t) = R_0 + \alpha L(t) \ (\alpha = \text{const}). \tag{11}$$

Величина α достаточно точно измеряется в эксперименте и лежит в диапазоне 10^{-2}—10^{-3}. Она зависит от условий создания кольца и определяет структуру осредненного движения в кольце. Эксперименты В. Ф. Тарасова [66] показали, что, начиная с чисел Рейнольдса порядка 10^5, α устанавливается на универсальном значении $3 \cdot 10^{-3}$.

На основе этих экспериментальных фактов и закона сохранения вихревого импульса $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} dv$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — осредненная завихренность, Б. А. Луговцов [67] выдвинул гипотезу об автомодельности движения и структуры вихревого кольца, когда единственным определяющим параметром является вихревой импульс P_0. Эта гипотеза согласуется с (11) и приводит к закону движения

$$L(t) = \frac{R_0}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{4\alpha U_0}{R_0} t\right)^{1/4} - 1\right].$$

Гипотеза автомодельности структуры вихревого кольца приводит к зависимости коэффициента турбулентной вязкости от времени

$$\nu_*(t) = \lambda P_0^{2/3} t^{-1/3} \quad (\lambda = \mathrm{const})$$

и к формулировке краевой задачи об отыскании распределения завихренности. В системе дифференциальных уравнений этой задачи λ играет роль малого параметра при старших производных. В пределе «исчезающей вязкости» $\lambda \to 0$ Б. А. Луговцов [68] сформулировал краевую задачу типа задачи «о склейке», не содержащую эмпирических констант, которая решена численно.

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными по измерению завихренности указало на недостаток этой теории: на самом деле в ядре вихря благодаря «гироскопической упругости» вращающейся жидкости происходит подавление турбулентности. Были предложены эмпирические зависимости турбулентной вязкости от аналога числа Ричардсона для вращающейся жидкости, что позволило в рамках той же модели достичь согласия с экспериментом по распределению завихренности [69]. В целом проблема адекватного описания движения вихревых колец вышеупомянутыми работами достаточно хорошо продвинута, но пока еще не может считаться завершенной. Эти исследования нашли конкретное применение при разработке нового вихрепорошкового способа тушения пожаров на газовых и нефтяных скважинах [70].

Идея М. А. Лаврентьева о возможности снижения сопротивления движению тела в вязкой жидкости за счет организации течения, аналогичного течению в вихревом кольце, обсуждалась в [71]. В экспериментах по обтеканию пары вращающихся цилиндров В. Л. Сенницкий [72] показал, что за счет вращения потребная для поступательного движения мощность может быть снижена на величину порядка 30%.

Линейные (торнадоподобные) вихри. Механизмы образования и структура интенсивных атмосферных вихрей (ураганов, смерчей, торнадо, пыльных «дьяволов») в настоящее время полностью не выяснены. Трудности экспериментального исследования этих явлений в естественных условиях стимулируют создание лабораторных моделей торнадоподобных вихрей. Конечно, в малых масштабах не удается воспроизвести всю совокупность природных условий, сопутствующих атмосферным вихрям. Вместе с тем лабораторное моделирование, наблюдение и изучение торнадоподобных вихрей в полностью контролируемых условиях позволяют глубже проникать в физику таких течений и способствуют возникновению новых полезных идей для объяснения явлений в атмосфере.

Обзор некоторых работ в этом направлении дан в [73]. На основе экспериментального определения структуры и параметров торнадоподобного вихря, образующегося в подогреваемой снизу вращающейся жидкости, В. В. Никулиным [74] построена приближенная модель и получено соотношение

$$V^2 \cong 10\alpha\beta g h, \tag{12}$$

где V — максимум вращательной скорости; α — удельный коэффициент теплового расширения; β — разность температур в ядре вихря и во внешней области течения; g — ускорение силы тяжести; h — высота вихря.

Соотношение (12) хорошо согласуется с лабораторными экспериментами и имеющимися данными по атмосферным вихрям.

Течения в вихревых камерах имеют структуру, аналогичную торнадоподобным вихрям. Исследования вихревых потоков такого типа описаны в монографии М. А. Гольдштика [75]. Здесь, а также в [76] представлен большой экспериментальный материал по структуре и основным параметрам таких потоков. Для расчета турбулентных течений выдвинут принцип минимума скорости диссипации кинетической энергии в тепловую, позволяющий определить турбулентную вязкость без использования эмпирических констант. В случае вихревой камеры турбулентная вязкость является функцией закрутки потока, а скорость диссипации энергии имеет два минимума [77] различной глубины. Они соответствуют разным режимам течения — прямоточному и циркуляционному (с внутренней циркуляционной зоной — нисходящий поток в ядре торнадо). При малой степени закрутки возможен только прямоточный режим (имеется лишь один минимум). При повышении степени закрутки появляется второй минимум, соответствующий циркуляционному течению, который при дальнейшем увеличении закрутки становится глубже первого, и реализуется циркуляционный режим. При определенной закрутке могут осуществляться оба режима. В эксперименте при этом наблюдается смена режимов при небольшом воздействии на входные параметры потока. Теоретические результаты находятся в хорошем согласии с опытными данными.

В точной постановке М. А. Гольдштиком [75] решена стационарная автомодельная задача о взаимодействии вихревой нити с плоскостью. Показано, что задача однозначно разрешима при малых числах Рейнольдса и не имеет решения при числах Рейнольдса, превышающих некоторое критическое значение. Физический смысл этого результата до сих пор остается неясным.

Гидродинамическая устойчивость. В этом разделе гидродинамики наиболее интенсивно разрабатывались два направления: устойчивость ламинарных течений вязкой жидкости в связи с проблемой ламинарно-турбулентного перехода и устойчивость вращающихся течений идеальной жидкости в связи с проблемой торнадо.

В [78, 79] экспериментально измерен спектр корреляционной функции одной компоненты скорости в течении Куэтта с вращающимся внутренним цилиндром. Наблюдаемая эволюция спектра отражает последовательную смену режимов течения (бифуркации) и дает убедительные свидетельства в пользу современного теоретического представления о механизме перехода к турбулентности — возникновение странного аттрактора в фазовом пространстве некоторой (адекватной) конечномерной динамической системы. Этот вывод подтверждается численным экспериментом на модели.

В экспериментах [80, 81] изучены режимы автоколебаний, возникновение трехмерных структур и резонансные взаимодействия в течении Пуазейля и в пограничном слое в области ламинарно-турбулентного перехода. Обнаружены характерные вихревые «лямбда-структуры», появляющиеся при возникновении трехмерных автоколебаний.

Монография М. А. Гольдштика и В. Н. Штерна [82] посвящена решению задач об устойчивости течений в каналах и пограничных слоях, струйных и МГД-течений. Авторами разработаны эффективные численные методы, позволившие надежно вычислять собственные значения при любых значениях параметров потока и определять область устойчивости. Предложена эскалаторная модель генерации автоколебаний конечной амплитуды, изучен характер ветвления этих решений. В [83] на основе этого подхода произведен расчет пороговых автоколебаний в течении Пуазейля. Сначала от исходного течения ответвляется периодическая волна, которая удовлетворительно моделируется моногармоническим приближением. Следующая бифуркация возникает по механизму параметрического резонанса при взаимодействии основной волны и симметричной пары косых волн удвоенного (по сравнению с основной волной) периода.

Возникающие автоколебания являются трехмерными, и их структура хорошо соответствует наблюдаемым в эксперименте «ламбда-структурам» [80, 81]. Получена пороговая кривая зависимости критического числа Рейнольдса от уровня возмущений, согласующаяся с опытными данными по ламинарно-турбулентному переходу.

В исследованиях В. А. Владимирова [14, 84] устойчивости вращающихся течений идеальной несжимаемой жидкости использовалась аналогия между эффектами плотностной стратификации и вращения. В линейной постановке показано, что любое вращающееся течение, за исключением твердотельного вращения, неустойчиво: существуют возмущения, нарастающие степенным образом со временем (принадлежащие непрерывному спектру). Найдены достаточные условия устойчивости относительно возмущений дискретного спектра, выделяющие широкий класс течений. В нелинейной задаче выделены классы течений, для которых аналогия эффектов плотностной стратификации и вращения переходит в эквивалентность (или близость) точных уравнений движения. В этих классах при наличии одного из видов симметрии (винтовой, вращательной, осевой, трансляционной) получен ряд критериев нелинейной устойчивости [85].

В [86] предложена теория резонансной неустойчивости линейных вихрей, возникающей при деформации их ядер. Условия возникновения изгиба вихрей, наблюдаемого в специально поставленном эксперименте, хорошо согласуются с результатами расчетов.

Турбулентность. Адекватное математическое моделирование явления турбулентности до сих пор остается вызывающей проблемой. Выдвинутые в последнее время концепции когерентных структур и странных аттракторов привели к более глубокому осознанию ее сложности. Вместе с тем отсутствие эффективного замкнутого математического описания турбулентных движений сильно ограничивает возможности их теоретического (и численного) анализа. Положение дел таково, что здесь основной прогресс достигается в неразрывной связи с экспериментом.

В Сибирском отделении выполнены многочисленные эксперименты по изучению турбулентных течений, которые внесли существенный вклад в разработку методов измерений и привели к ряду важных выводов. Большой цикл работ в этой области подытожен в монографии С. С. Кутателадзе с соавторами [87]. В частности, Е. М. Хабахпашевой [88] разработан метод стробоскопической визуализации потока, позволяющий получать фотографии прерывистых треков мелких светорассеивающих частиц и с помощью последующей полуавтоматической обработки этих фотографий на ЭВМ определять мгновенное поле скоростей, средние величины и ряд статистических характеристик течения. Это дало возможность выяснить структуру турбулентного потока в непосредственной близости от стенки в вязком подслое, где измерения с помощью трубок полного напора и термоанемометров весьма неточны. Преимущества нового метода особенно сильно проявляются при исследовании потоков с растворами полимеров, которые в некоторых случаях существенно снижают гидравлическое сопротивление при течении воды в трубах [87]. Большой объем полученных этим методом экспериментальных результатов дает надежную основу для проверки теоретических моделей пристенной турбулентности. Возможность одновременного измерения скорости во многих точках пространства важна для экспериментального выявления когерентных структур при больших числах Рейнольдса. Аналогичный метод для измерения свободного турбулентного сдвигового течения использован в [89]. Здесь обнаружен выброс из зоны хаотического течения вихревых колец.

С методической точки зрения интересна работа В. И. Букреева [90] по измерению статистических характеристик пульсаций давлений в гидравлическом прыжке. Это одна из первых работ, в которых для обработки результатов экспериментов использована ЭВМ и решен ряд вопросов автоматизации. В ней впервые экспериментально показано, что вероятностные характеристики турбулентных пульсаций значительно отклоняются от гауссовского распределения.

В экспериментальных исследованиях В. И. Букреева, О. Ф. Васильева и Ю. М. Лыткина [91] турбулентного следа за телами различной формы впервые получены свидетельства тому, что, вопреки ранее имевшимся представлениям, статистические характеристики турбулентности в следе сохраняют «память» о деталях формы обтекаемого тела на очень больших расстояниях вниз по течению. Отсюда возникает сомнение в возможности получения универсальной модели для описания турбулентных потоков в терминах одноточечных моментов и свидетельствует о существенном влиянии больших вихрей (когерентных структур) на статистические характеристики течения. Однако упомянутые эксперименты, так же как и другие экспериментальные работы в этом направлении, проведены при ограниченных числах Рейнольдса, а имеются экспериментальные свидетельства в пользу того, что при достаточно больших числах Рейнольдса универсальность должна иметь место. Этот важный момент нуждается в дальнейшей разработке.

Серия экспериментов относилась к турбулентным течениям в трубах при стационарном и пульсирующем расходе. В. И. Букреев с соавторами [92] получил (единственные в опубликованной литературе) данные о характеристических функциях пульсаций скорости. Д. Р. Веске и Г. Е. Стуров [93] измерили все компоненты тензора турбулентных напряжений в потоке с закруткой. В. И. Букреев и В. М. Шахин [94] обнаружили эффект инерционности (неизменности) турбулентных пульсаций при изменении профиля средней скорости в случае пульсирующего расхода.

Создана оригинальная экспериментальная установка [95], позволяющая измерять статистические характеристики турбулентного течения, в котором отсутствует сдвиг осредненной скорости и имеется градиент интенсивности пульсаций скорости в поперечном к потоку направлении. Полученные результаты (особенно в последнем эксперименте) дают богатый материал для апробации различных теоретических моделей, претендующих на универсальность.

Подавление турбулентности вращением изучалось в экспериментах В. Ф. Тарасова и В. А. Владимирова [96, 97] по переносу примеси вихревым кольцом. Показано, что даже при развитой турбулентности в атмосфере вихря турбулентный перенос примеси практически отсутствует. Очень четко подавление турбулентности продемонстрировано в специальном эксперименте, позволившем наблюдать это явление в стационарных условиях [98], особенно показателен опыт с краской [69]. Качественно подавление турбулентности объясняется гироскопической упругостью жидкости, вращающейся как твердое тело. В ядрах концентрированных вихрей, где жидкость вращается почти как твердое тело, турбулентные пульсации скорости носят волновой характер (инерционные волны) и не переносят примесь [97]. К такому же заключению приводит аналогия между поведением малых возмущений во вращающейся и стратифицированной по плотности жидкости [98]. Основанные на этих исследованиях полуэмпирические модели подавления использованы при расчете структуры турбулентного вихревого кольца [69].

В настоящее время теоретическое описание и расчет турбулентных течений базируются в основном на полуэмпирических моделях, конструирование которых опирается на анализ результатов эксперимента и связано с привлечением гипотез или принципов, не имеющих глубокого обоснования. Результаты, полученные таким способом, имеют ограниченное научное значение, однако это пока единственный путь теоретического исследования конкретных турбулентных течений. Данное направление широко представлено в работах, выполненных в Сибирском отделении. Большой цикл исследований основных закономерностей осредненного течения пристенного турбулентного пограничного слоя без привлечения эмпирических коэффициентов изложен в монографии С. С. Кутателадзе [99].

Модель третьего уровня замыкания использовалась для численного расчета сложных турбулентных течений в [100—102] с учетом температурной и плотностной стратификации. Результаты расчета турбулентного следа за цилиндром и турбулентной конвекции в слое жидкости, перемешиваемом флуктуирующей силой плавучести (задача о «термоклине»), хорошо согласуются с данными эксперимента. При этом модель правильно и с хорошей точностью описывает наблюдаемые в эксперименте явления контрградиентной диффузии примеси, температуры, интенсивности пульсаций скорости и т. п., которые не описываются моделями более низкого уровня замыкания.

Модель, описывающая возникновение слоистой структуры в непрерывно стратифицированной жидкости, предложена В. Ю. Ляпидевским [14]. Показано, что механизм вертикального переноса массы (импульса) через устойчивую границу раздела связан с возбуждением коротких волн длинными и их последующим опрокидыванием, приводящим к турбулентному перемешиванию. В [103, 104] предложена новая модель турбулентного перемешивания в течениях со сдвигом, учитывающая присутствие в течении «больших вихрей» и перемежаемость, и найдено аналитическое решение задачи о распаде тангенциального разрыва.

Статистическое описание слабонелинейных взаимодействующих волн на поверхности тяжелой жидкости выполнено В. Е. Захаровым и Н. Н. Филоненко [105]. Рассматривается однородная, изотропная, слабая (волновая) турбулентность. В этом случае для замыкания делаются два основных предположения: случайность распределения фаз отдельных мод и малость семиинвариантов шестого порядка, что дает возможность получить кинетическое уравнение для спектра корреляционной функции второго порядка. В предположении существования инерционного интервала (аналогично интервалу Колмогорова — Обухова в обычной турбулентности), разделяющего источник и сток в пространстве волновых чисел, определяется энергетический спектр.

Для описания закритических стохастических режимов М. А. Гольдштиком [106] предложена модель структурной турбулентности. Она основана на представлении случайного поля в виде совокупности упорядоченных структур, случайно распределенных в пространстве и времени. Применение этого подхода к простой модели термоконвективного течения (аттрактор Лоренца) показало, что он удовлетворительно описывает не только интегральные характеристики, но и тонкую структуру спектра турбулентных режимов вблизи порога их возникновения.

Аэроупругость. Исследования по взаимодействию колеблющихся лопастей решеток с набегающим потоком связаны с проблемой аэроупругости лопаток турбомашин. Итоги первого этапа работы подведены в монографиях Д. Н. Горелова, В. Б. Курзина и В. Э. Сарена [107, 108].

На примере течения жидкости через решетку тонких профилей, колеблющихся в дозвуковом потоке, выявлен ряд особенностей поведения нестационарных аэродинамических характеристик, главным образом коэффициентов сил и моментов, определяющих качественное их отличие от соответствующих характеристик изолированных профилей. Гидродинамическая интерференция соседних профилей решетки может привести к существенному снижению критической скорости ее флаттера. Сжимаемость жидкости оказывает существенное влияние на аэродинамические характеристики решеток не только при больших дозвуковых скоростях, как это имеет место в стационарном потоке, но и при малых скоростях, если частоты колебаний велики. Вторая особенность связана с возникновением акустического резонанса, когда частоты возмущающих сил совпадают с собственными частотами колебаний жидкости в решетчатой области. Для определения режимов акустического резонанса решена задача о собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин.

Следующий этап связан с усложнением моделей решетки и потока, со всесторонней апробацией этих моделей и приложением результатов к практике. Рассмотрено течение идеальной несжимаемой жидкости через решетки вибрирующих профилей произвольной формы [109]. Путем численного решения начально-краевой задачи, в котором учитывалась эволюция сбегающих с профилей вихревых следов, В. П. Рябченко [110] установил, что при малых колебаниях профилей форма следов не оказывает существенного влияния на аэродинамические характеристики решеток. Поэтому с достаточной степенью достоверности можно пользоваться аэродинамическими характеристиками решеток, полученными из решения линейной задачи. В. Э. Сареном исследованы условия разрешимости и найдено общее решение соответствующей краевой задачи. Алгоритмы численного решения задачи о гидродинамическом взаимодействии взаимно движущихся решеток произвольных профилей с учетом вихревых следов построены В. А. Юдиным [111], а задачи о пространственном течении идеальной несжимаемой жидкости через кольцевую решетку тонких колеблющихся лопастей произвольной формы — В. П. Рябченко [112].

Связь между поведением аэродинамических характеристик решеток в окрестности режимов акустического резонанса и формой соответствующих собственных колебаний установлена В. Б. Курзиным [113]. Предложена модель, в которой потеря энергии колебаний около решетки пластин за счет излучения и образования вихревых следов компенсируется экспоненциальным ростом амплитуд колебаний при удалении от решетки. Это привело к обобщению классического условия излучения Зоммерфельда (при отсутствии потока, решетка простирается вдоль оси y) в виде

$$\varphi(x, y, \lambda) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp i\left(ny + |x|\sqrt{\lambda^2 - n^2}\right) \quad (|x| \to \infty).$$

Задача на собственные значения с таким условием излучения решена С. В. Сухининым [114], доказавшим дискретность спектра.

В заключение авторы выражают благодарность С. Н. Антонцеву, В. И. Букрееву, О. Ф. Васильеву, М. А. Гольдштику, В. Б. Курзину, В. Н. Монахову, В. В. Пухначеву, В. М. Тешукову и другим коллегам за предоставленные ими материалы, которые были использованы при составлении настоящего обзора, а также Э. З. Боровской за качественную подготовку рукописи к изданию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
4. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнений С. А. Чаплыгина // ПМТФ.— 1960.— № 3.
5. **Меньщиков В. М.** О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 10.
6. **Пухначев В. В.** Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободной границей // ДАН СССР.— 1972.— Т. 202, № 2.
7. **Овсянников Л. В.** Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // ДАН СССР.— 1965.— Т. 163, № 4.
8. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— Новосибирск: Наука, 1967.
9. **Налимов В. И.** Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложение к задаче Коши — Пуассона // ДАН СССР.— 1969.— Т. 189, № 1.
10. **Овсянников Л. В.** Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // ДАН СССР.— 1971.— Т. 200, № 4.
11. **Овсянников Л. В.** К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973.— Вып. 15.
12. **Макаренко Н. И.** Обоснование трехмерной модели мелкой воды // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1980.— Вып. 44.
13. **Налимов В. И.** Задача Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1974.— Вып. 18.
14. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
15. **Букреев В. И., Гаврилов Н. В.** Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1983.— № 5.
16. **Гаврилов Н. В.** Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 5.

17. **Красовский Ю. П., Лаврентьев М. А., Моисеев Н. Н. и др.** Математические вопросы гидродинамики жидкости со свободными границами // ПМТФ.— 1963.— № 4.
18. **Плотников П. И.** Разрешимость задачи о пространственных гравитационных волнах на поверхности идеальной жидкости // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 3.
19. **Плотников П. И.** Обоснование гипотезы Стокса в теории поверхностных волн // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 58.
20. **Налимов В. И.** Стационарные поверхностные волны над неровным дном // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 58.
21. **Лаврентьев М. А.** Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.— М.: Наука, 1972.
22. **Монахов В. Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.— Новосибирск: Наука, 1977.
23. **Плотников П. И.** Разрешимость осесимметричных задач гидродинамики со свободными границами // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 10.
24. **Антонцев С. Н.** Краевые задачи для некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды.— Новосибирск: НГУ, 1978.— Ч. 1.
25. **Стратифицированные** течения жидкости: Библиография.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.
26. **Стратифицированные** течения: Библиографический указатель.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1978.
27. **Поверхностные** и внутренние волны: Библиографический указатель.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Ч. 1; 1986.— Ч. 2.
28. **Гарипов Р. М.** Неустановившиеся волны над подводным хребтом // ДАН СССР.— 1965.— Т. 161, № 3.
29. **Биченков Е. И., Гарипов Р. М.** Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // ПМТФ.— 1969.— № 2.
30. **Гарипов Р. М.** Асимптотика волн Коши — Пуассона // Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970.
31. **Стурова И. В.** Внутренние волны, генерируемые локальными возмущениями в двухслойной стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1978.— Т. 14, № 11.
32. **Пухначев В. В.** Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнения Навье — Стокса // ПМТФ.— 1972.— № 3.
33. **Пухначев В. В.** Переменные Мизеса в задачах со свободной границей для уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР.— 1973.— Т. 210, № 2.
34. **Пухначев В. В.** Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течение вязкой жидкости со свободной поверхностью // ПМТФ.— 1973.— № 2.
35. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных смесях.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983.
36. **Пухначев В. В.** К теории катящихся волн // ПМТФ.— 1975.— № 5.
37. **Бытев В. О.** Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // ПМТФ.— 1970.— № 3.
38. **Лаврентьева О. М.** Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1980.— Вып. 44.
39. **Пухначев В. В.** Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // ДАН СССР.— 1984.— Т. 279, № 5.
40. **Кузнецов В. В.** Расчет течений расплава в ампуле // ПМТФ.— 1984.— № 2.
41. **Хуснутдинова Н. В.** Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 5.
42. **Лаврентьев М. А., Кузнецов В. М., Шер Е. Н.** О направленном метании грунта при помощи взрывчатого вещества // ПМТФ.— 1960.— № 4.
43. **Овсянников Л. В.** Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости // Тр. 5-й сессии Ученого совета по народнохозяйственному использованию взрыва.— Фрунзе: Илим, 1965.
44. **Лаврентьева О. М.** О движении жидкого эллипсоида // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 4.
45. **Андреев В. К., Пухначев В. В.** О движении конечной массы жидкости // ПМТФ.— 1979.— № 2.
46. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей.— Новосибирск: НГУ, 1975.
47. **Пухначев В. В.** О стационарном движении конечной массы жидкости // ДАН СССР.— 1978.— Т. 239, № 5.
48. **Тешуков В. М.** Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ.— 1980.— № 2.
49. **Тешуков В. М.** Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 4.
50. **Блохин А. М.** Оценка интеграла энергии смешанной задачи для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // СМЖ.— 1981.— Т. 22, № 4.
51. **Васильев О. Ф.** Неустановившиеся течения в открытых руслах, каналах и трубопроводах // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1975.— Вып. 23.

52. **Атавин А. А., Васильев О. Ф. и др.** Численные методы решения одномерных задач гидродинамики // Водные ресурсы.— 1983.— № 4.
53. **Атавин А. А.** Расчет неустановившегося течения воды в разветвленных системах речных русел или каналов // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1975.— Вып. 22.
54. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск: Наука, 1981.
55. **Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.** Математические методы в вопросах орошения.— М.: Наука, 1969.
56. **Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А.** Системное математическое моделирование процессов водообмена.— Новосибирск: Наука, 1986.
57. **Эмих В. Н.** Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 5.
58. **Коновалов А. Н.** Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.— Новосибирск: НГУ, 1972.
59. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.— Новосибирск: Наука, 1983.
60. **Гольдштик М. А.** Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // ДАН СССР.— 1962.— Т. 147, № 7.
61. **Шабат А. Б.** Об одной схеме движения идеальной жидкости при наличии траншеи на дне // ПМТФ.— 1962.— № 4.
62. **Плотников П. И.** О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1969.— Вып. 3.
63. **Онуфриев А. Т.** Теория движения кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ.— 1967.— № 2.
64. **Ахметов Д. Г., Кисаров О. П.** Гидродинамическая структура кольцевого вихря // ПМТФ.— 1966.— № 4.
65. **Луговцов А. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф.** О движении турбулентного вихревого кольца // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1969.— Вып. 3.
66. **Тарасов В. Ф.** Оценка некоторых параметров турбулентного вихревого кольца // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973.— Вып. 14.
67. **Луговцов Б. А.** О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970.
68. **Луговцов Б. А.** Турбулентные вихревые кольца // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1979.— Вып. 38.
69. **Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф.** Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей // ПМТФ.— 1980.— № 5.
70. **Ахметов Д. Г., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф.** Тушение пожаров на газонефтяных скважинах с помощью вихревого кольца // ФГВ.— 1980.— № 5.
71. **Луговцов А. А., Луговцов Б. А.** Пример обтекания тела с движущейся границей вязкой несжимаемой жидкостью // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1971.— Вып. 8.
72. **Сенницкий В. Л.** О силе сопротивления, действующей на пару круговых цилиндров, обтекаемых потоком воды // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1981.— Вып. 52.
73. **Луговцов Б. А.** Лабораторное моделирование торнадоподобных вихрей // Интенсивные атмосферные вихри.— М.: Мир, 1985.
74. **Никулин В. В.** Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами // ПМТФ.— 1980.— № 1.
75. **Гольдштик М. А.** Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, 1981.
76. **Волчков Э. П., Смульский И. И.** Аэродинамика вихревой камеры с торцевым и боковым вдувом // Теор. основы хим. технологии.— 1983.— Т. 17, № 2.
77. **Гольдштик М. А.** Вариационная модель турбулентного вращающегося потока // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
78. **Кузнецов Е. А., Львов В. С. и др.** О проблеме перехода к турбулентности в течении Куэтта // Письма в ЖЭТФ.— 1979.— Вып. 4, № 30.
79. **Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И.** Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натуральный и численный эксперимент // ЖЭТФ.— 1981.— Т. 80, № 3.
80. **Козлов В. В., Рамазанов М. П.** Образование трехмерных структур в течении Пуазейля при резонансном взаимодействии // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 1.
81. **Kachanov Yu. S., Levchenko V. Ya.** The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in boundary layer // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138.— P. 209.
82. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
83. **Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штерн В. Н.** Число Рейнольдса перехода в плоском канале // ДАН СССР.— 1983.— Т. 273, № 1.
84. **Владимиров В. А.** Пример эквивалентности эффектов плотностной стратификации и вращения // ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 2.

85. **Владимиров В. А.** Условия нелинейной устойчивости течений идеальной жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.
86. **Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.** Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости линейного вихря с деформированным ядром // ПМТФ.— 1983.— № 3.
87. **Кутателадзе С. С., Миронов Б. П. и др.** Экспериментальное исследование пристенных турбулентных течений.— Новосибирск: Наука, 1975.
88. **Орлов В. В., Михайлова Е. С., Хабахпашева Е. М.** Полуавтоматические измерения кинематических характеристик в турбулентных течениях жидкостей и газов // Метрология.— 1970.— № 3.
89. **Новиков Б. Г., Федосенко В. Д. и др.** Стереометрическое изучение дальнего турбулентного свободного сдвигового течения // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
90. **Букреев В. И.** Статистические характеристики пульсаций давления в гидравлическом прыжке // ПМТФ.— 1966.— № 5.
91. **Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М.** О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // ДАН СССР.— 1972.— Т. 207, № 4.
92. **Букреев В. И., Зыков В. В., Костомаха В. А.** Одномерные законы распределения вероятностей флуктуации скорости при турбулентном течении в круглой трубе // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1975.— Вып. 3, № 13.
93. **Веске Д. Р., Стуров Г. Е.** Экспериментальное исследование турбулентного закрученного течения в цилиндрической трубе // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1972.— Вып. 3, № 13.
94. **Букреев В. И., Шахин В. М.** Статистически нестационарное турбулентное течение в трубе/ИГ СО АН СССР.— Новосибирск, 1981.— Деп. в ВИНИТИ 24.02.81, № 866—81.
95. **Алексенко Н. В., Букреев В. И., Костомаха В. А.** Бессдвиговое взаимодействие двух изотропных турбулентных полей // ПМТФ.— 1985.— № 1.
96. **Тарасов В. Ф., Якушев В. И.** Экспериментальные исследования переноса примеси турбулентным вихревым кольцом // ПМТФ.— 1974.— № 1.
97. **Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.** Структура турбулентности вблизи ядра вихревого кольца // ДАН СССР.— 1979.— Т. 245, № 6.
98. **Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.** О свойствах упругости закрученных потоков // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 3.
99. **Кутателадзе С. С.** Пристенная турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1973.
100. **Курбацкий А. Ф.** Численное изучение процессов турбулентного переноса в зоне перемешивания // ПМТФ.— 1975.— № 3.
101. **Курбацкий А. Ф., Онуфриев А. Т.** Моделирование турбулентного переноса в следе за цилиндром с привлечением уравнений для третьих моментов // ПМТФ.— 1979.— № 6.
102. **Курбацкий А. Ф., Яненко Н. Н.** О моделировании эффектов отрицательного порождения интенсивности пульсаций температуры в турбулентном слое смешения // ДАН СССР.— 1982.— Т. 262, № 2.
103. **Ляпидевский В. Ю.** Модель турбулентного перемешивания в течениях однородной жидкости со сдвигом скорости // Динамика сплошной среды. Динамика неоднородных жидкостей.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 72.
104. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о слое смешения в однородной жидкости // Динамика сплошной среды. Нестационарные проблемы механики.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 74.
105. **Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.** Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // ДАН СССР.— 1966.— Т. 170, № 6.
106. **Гольдштик М. А.** Структурный анализ стохастического поведения динамических систем // Структурная турбулентность.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982.
107. **Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э.** Аэродинамика решеток в нестационарном потоке.— Новосибирск: Наука, 1971.
108. **Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э.** Атлас нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей.— Новосибирск: Наука, 1974.
109. **Рябченко В. П., Сарен В. Э.** К расчету аэродинамических характеристик решеток профилей произвольной формы // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 2.
110. **Рябченко В. П.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании решетки профилей // Учен. зап. ЦАГИ.— 1973.— Т. 4, № 6.
111. **Юдин В. А.** Расчет гидродинамического взаимодействия решеток профилей с учетом закромочных следов // Аэроупругость лопастей турбомашин // Тр. ЦИАМ.— 1981.— № 953.
112. **Рябченко В. П.** Аэродинамические силы, действующие на лопасти пространственной кольцевой решетки при нестационарном обтекании // ПМТФ.— 1979.— № 4.
113. **Курзин В. Б.** Об акустическом резонансе в турбомашинах // Пробл. прочности.— 1974.— № 8.
114. **Сухинин С. В.** Обоснование модели колебаний газа, обтекающего решетку пластин // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 56.

Поступила 26/XII 1986 г.