Sur une équation différentielle du premier ordre.

Par

M. Lavrentieff à Moscou.

Le but de cette Note est de construire une fonction $f(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble des variables x et y dans le carré $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$ et telle que pour tout point x_0, y_0 $(0 < x_0 < 1, 0 < y_0 < 1)$ il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

passant par ce point et distinctes dans un domaine aussi petit que l'on veut autour du point x_0, y_0.

Il parait que l'existence des équations ayant la propriété indiquée n'a pas encore été démontrée. Je dois mentionner ici une Note de M. Tamarkine[1]), où l'auteur montre que pour toute fonction $f(x, y)$ vérifiant une certaine condition il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation différentielle (1) passant par l'origine des coordonnées. Voici cette condition:

„On peut trouver une fonction continue positive croissante $\psi(u)$ qui possède les propriétés suivantes:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \geqq \psi(|y_2 - y_1|), \qquad (\psi(0) = 0) \tag{12}$$

dans le rectangle $R_1(\pm a_1, \pm b_1)$; l'intégrale

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)}$$

est convergente pour $u = 0$."

---

[1]) „Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires", Math. Zeitschr. 16 (3./4.), S. 207–213.

Pour la démonstration de son théorème M. Tamarkine ne se sert au fond que de la condition suivante:

$$(12') \qquad |f(x,y) - f[x,\varphi(x)]| \geqq \psi(|y-\varphi(x)|),$$

$y = \varphi(x)$ étant une courbe intégrale de l'équation (1) passant par l'origine.

Il est aisé de voir qu'il existe en effet une infinité de fonctions continues $f(x,y)$, vérifiant la condition $(12')$. On voit ainsi qu'il existe une classe de fonctions continues $f(x,y)$ telles qu'au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passent par l'origine.

Il suit aussi de la condition $(12')$ qu'il existe pour tout point de la courbe $y = \varphi(x)$ au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par ce point.

On pourrait comprendre l'énoncé de M. Tamarkine dans le sens qu'il s'agit d'une fonction $f(x,y)$ vérifiant la condition (12) pour tout couple de nombres y_1, y_2; $b_1 \leqq y_1 \leqq b_2$; $b_1 \leqq y_2 \leqq b_2$. Dans ce cas, on déduirait de la démonstration du théorème, que si une fonction $f(x,y)$ vérifie la condition (12) il existe pour tout point du rectangle R_1 au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par ce point. Mais on peut démontrer qu'il n'existe pas de fonctions continues $f(x,y)$ vérifiant la condition (12), si l'on tient cette condition dans le sens précédemment indiqué.

En effet, considérons la fonction $\chi(y)$ de la variable indépendante y, $\chi(y) = f(x_0, y)$ $(-a_1 < x_0 < a_1)$. Il suit d'abord de la condition (12), que la fonction $\chi(y)$ $(0 \leqq y \leqq b_1)$ est toujours croissante ou toujours décroissante. En effet, dans le cas contraire on pourrait indiquer deux nombres y_1 et y_2, $0 \leqq y_1 < y_2 \leqq b_1$ tels que $f(x_0, y_2) = f(x_0, y_1)$ ce qui contredit à l'hypothèse (12) puisque $\psi(|y_2 - y_1|) > 0$. Deux cas sont donc possibles (pour $0 \leqq y \leqq b_1$): a) $\chi(y)$ est croissante; b) $\chi(y)$ est décroissante. Considérons le cas a). Soit y_0 un nombre quelconque $0 < y_0 < b_1$: d'après la condition (12) on a

$$\chi(y_0 + h) - \chi(y_0) \geqq \psi(h) \qquad (h > 0).$$

D'autre part, d'après les propriétés de la fonction $\psi(u)$, nous avons

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h} = +\infty.$$

En effet, supposons que $\limsup\limits_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h} < M$, mais alors, pour u_0 assez petit,

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)} > \int_u^{u_0} \frac{du}{Mu} = \frac{1}{M} \lg\left(\frac{u_0}{u}\right).$$

Pour $u \to 0$ le second membre tendant vers $+\infty$, le premier membre tend donc aussi vers $+\infty$, ce qui contredit à la condition posée.

Il en suit donc

$$\limsup_{h \to 0} \frac{\chi(y_0+h)-\chi(y_0)}{h} \neq +\infty$$

quelque soit le point y_0, $0 < y_0 < b_1$.

On voit ainsi que la fonction continue $\chi(y)$ a en chaque point de l'intervalle $(0, b_1)$ le nombre dérivé supérieur droit égal à $+\infty$ ce qui n'est pas possible d'après les résultats de M. Denjoy sur les nombres dérivés [2]).

Dans le cas b), en raisonnant d'une manière tout à fait analogue on démontre l'existence d'une fonction continue $\chi(y)$ ayant en tout point d'un intervalle $(0, b_1)$ le nombre dérivé inférieur droit égal à $-\infty$, ce qui n'est pas possible en vertu des mêmes résultats de M. Denjoy.

Je passe maintenant à la construction, déjà indiquée d'une fonction $f(x, y)$ telle que pour un point quelconque du carré il existe au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation différentielle (1) passant par ce point.

1. Considérons le carré $O(0, 0)$; $B(1, 0)$; $C(1, 1)$; $D(0, 1)$ dans le plan u, v. Divisons le côté OD par les points $a_1, a_2, \ldots, a_{8k-1}$ en $8k$ parties égales et joignons les points de division $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2\nu}, \ldots, a_{8k-2}$ evec le point $E(1, \frac{1}{2})$, les points $a_3, a_7, \ldots, a_{4\nu-1}, \ldots, a_{8k-1}$ avec le point $F(1, \frac{3}{4})$ par des droites. Nous aurons un nombre fini de points d'intersection de ces droites entre elles. Au voisinage de chacun de ces points nous déformons légèrement les droites qui y aboutissent en remplaçant les bouts de ces droites par des arcs de

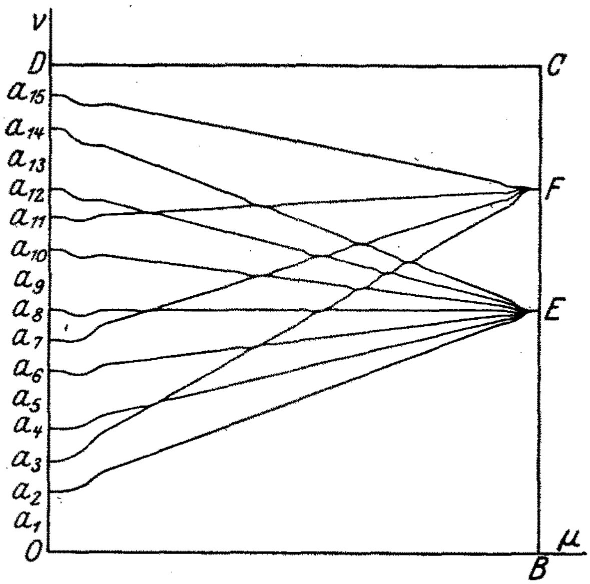

Fig. 1.

[2]) „Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues", Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1915, S. 105–240.

courbes continues ayant une même tangente au point considéré. D'autre part nous avons un nombre fini de points communs aux droites considérées et aux segments OD et BC; au voisinage de ces points nous remplaçons les bouts des droites par des arcs de courbes continues, ayant des tangentes parallèles à l'axe des u aux points des segments OD et BC (fig. 1). Nous supposons de plus que les conditions suivantes sont vérifiées: 1) Toutes les courbes obtenues par les deux déformations indiquées en partant des droites précédentes, possèdent des tangentes en chaque point, 2) $v = \varphi(u)$ étant l'équation d'une quelconque de ces courbes, $\varphi'(u)$ est toujours continue et l'on a $|\varphi'(u)| < 1$.

2. Considérons le carré $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$ dans le plan ξ, η. Divisons ce carré par les droites $\xi = \frac{1}{2}$, $\xi = \frac{1}{4}$, ..., $\xi = \frac{1}{2^n}$, ... en une infinité dénombrable de rectangles

$$R_n = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, 0\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right); \left(\frac{1}{2^n}, 1\right)\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Divisons le rectangle R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ par des droites parallèles à l'axe des ξ en $2^n n!$ rectangles égaux, les désignant par $R_{n,p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots, 2^n n!$

$$R_{n,p} = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{p-1}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{p-1}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{p}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^n}, \frac{p}{2^n n!}\right)\right\}.$$

Etablissons entre les points du rectangle $R_{n,p}$ et les points de carré considéré dans le § 1 la correspondance suivante

$$(1) \qquad \xi = \frac{u}{2^n} + \frac{1}{2^n}; \quad \eta = \frac{v}{2^n n!} + \frac{p-1}{2^n n!}.$$

En posant $k = n + 1$, on voit de suite qu'à toutes les courbes $v = \varphi(u)$ construites dans le carré du plan u, v correspondent, d'après (1), des courbes continues dans le rectangle $R_{n,p}$ du plan ξ, η: $\eta = \overline{\varphi}(\xi)$ et l'on a $|\overline{\varphi}'(\xi)| < \frac{2^n}{2^n n!} = \frac{1}{n!}$.

En posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ et, respectivement, $p = 1, 2, 3, \ldots, 2^n n!$, nous aurons dans tout rectangle $R_{n,p}$ un nombre fini d'arcs de courbes continues; nous aurons donc dans le carré considéré un système d'arcs de courbes continues. Ajoutons à ce système les côtés des rectangles $R_{n,p}$ parallèles à l'axe ξ. Considérons un arc d'une courbe quelconque du système ainsi complété. Il est aisé de voir que l'extrémité gauche d'un tel arc contenu dans le rectangle $R_{n,p}$ est en même temps l'extrémité droite de certains arcs de courbes, contenus dans R_{n+1}

(fig. 2). Donc en suivant un chemin le long d'un arc quelconque d'une courbe du rectangle R_1 on peut passer à un arc de courbe du rectangle R_2 et ainsi de suite, en suivant toujours une courbe continue construite, soit $\eta = \psi(\xi)$, et il est clair que la fonction $\psi'(\xi)$ est aussi continue.

Désignons par S le système de toutes les courbes ainsi construites. D'après la construction même de S nous déduisons immédiatement les propriétés suivantes de ce système:

1) Quelle que soit la courbe $\eta = \psi(\xi)$ appartenant à S nous avons $|\psi'(\xi)| < \frac{1}{n!}$ pour $\xi \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) Si deux courbes du système ont un point commun, ils ont la même tangente en ce point.

3) Quelle que soit la droite $\xi = a$, $a \neq 0$, nous avons toujours sur cette droite un nombre fini de points des courbes du système S.

4) Quelle que soit l'aire fermée, n'ayant pas de points sur l'axe des η, elle contient au plus un nombre fini de points de ramification du système de courbes considérées.

Nous allons démontrer encore la propriété suivante.

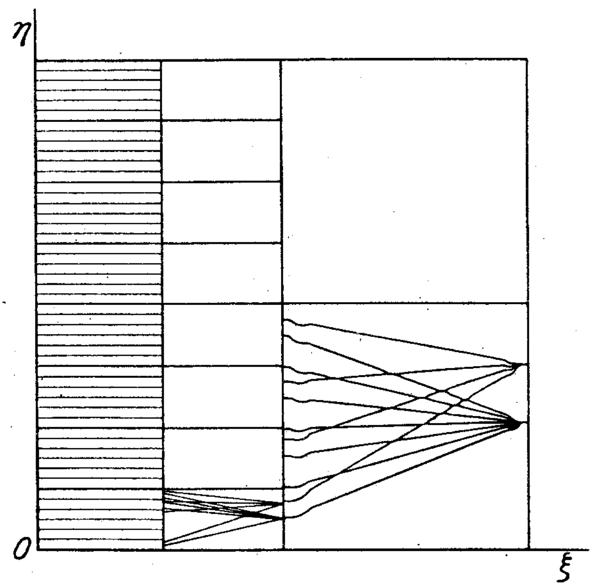

Fig. 2.

5) Quel que soit le point $0 \leqq \eta_0 \leqq 1$ de l'axe des η il existe au moins deux courbes du système S passant par le point η_0 et ne coïncidant dans aucun intervalle.

En effet, soit

$$(2) \qquad R_{1,p_1},\ R_{2,p_2},\ \ldots,\ R_{n,p_n}, \ldots$$

la suite des rectangles, qui contiennent des segments de la droite $\eta = \eta_0$. On voit aisément que le côté droit du rectangle R_{n,p_n} est situé sur le côté gauche du rectangle $R_{n-1,p_{n-1}}$. De plus sur l'axe des η le point η_0 est la limite unique pour tous les points de l'aire formée par la réunion des rectangles de la suite (2). Il suit de cette remarque et de la construction du système S qu'il existe au moins deux courbes du système S, joignant la droite $\xi = 0$ à la droite $\xi = 1$, qui sont contenues dans l'aire indiquée et ne coïncident dans aucun intervalle. Ce qui prouve la propriété 5).

3. Soient $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$; $\ldots$; $y = f_k(x)$ k fonctions, continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre, définies pour $a \leqq x \leqq b$ et telles que $0 < f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_k(x) < 1$.

Établissons une correspondance entre les points du rectangle $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$; $\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$; $(0, 1)$ du plan ξ, η et les points du rectangle $(a, 0)$; $(b, 0)$; $(b, 1)$; $(a, 1)$ situés dans le plan x, y, en posant $h = 2^n(b-a)$

$$
\begin{aligned}
x &= h\xi + a, \\
y &= F(\xi, \eta),
\end{aligned} \tag{3}
$$

où

$$
\left\{
\begin{aligned}
&F(\xi, \eta) = (k+1)\eta f_1(h\xi + a) \qquad \left(0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{k+1}\right), \\
&F(\xi, \eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{1}{k+1}\right)[f_2(h\xi + a) - f_1(h\xi + a)] + f_1(h\xi + a) \\
&\qquad\qquad \left(\frac{1}{k+1} \leqq \eta \leqq \frac{2}{k+1}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F(\xi, \eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{p}{k+1}\right)[f_{p+1}(h\xi + a) - f_p(h\xi + a)] + f_p(h\xi + a) \\
&\qquad\qquad \left(\frac{p}{k+1} \leqq \eta \leqq \frac{p+1}{k+1}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F(\xi, \eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{k}{k+1}\right)[1 - f_k(h\xi + a)] + f_k(h\xi + a) \\
&\qquad\qquad \left(\frac{k}{k+1} \leqq \eta \leqq 1\right).
\end{aligned}
\right. \tag{4}
$$

Cette correspondance est évidemment biunivoque et bicontinue. Elle jouit de plus d'une propriété importante que nous allons indiquer.

Soient $\eta = \varphi(\xi)$ et $\eta = \psi(\xi)$ deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre et telles que pour $\xi = \xi_0$, $0 < \xi_0 < \frac{1}{2^n}$, on $a: 0 < \varphi(\xi_0) < 1$; $0 < \psi(\xi_0) < 1$; $\varphi(\xi_0) = \psi(\xi_0)$ et $|\varphi'(\xi_0) - \psi'(\xi_0)| < \varepsilon$. Considérons les courbes dans le plan x, y correspondant aux courbes $\eta = \varphi(\xi)$ et $\eta = \psi(\xi)$ du plan ξ, η:

$$
y = F\left[\frac{x-a}{h}, \varphi\left(\frac{x-a}{h}\right)\right] = \overline{\varphi}(x),
$$

$$
y = F\left[\frac{x-a}{h}, \psi\left(\frac{x-a}{h}\right)\right] = \overline{\psi}(x).
$$

En posant $x_0 = h\xi_0 + a$, nous avons, si

$$\varphi(\xi_0) + \frac{p}{k+1} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, k+1)$$

$$\overline{\varphi}'(x_0) = \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\varphi(\xi_0)}} \cdot \frac{1}{h} + \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\varphi(\xi_0)}} \cdot \varphi'(\xi_0)\cdot\frac{1}{h},$$

$$\overline{\psi}'(x_0) = \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\psi(\xi_0)}} \cdot \frac{1}{h} + \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\psi(\xi_0)}} \cdot \psi'(\xi_0)\cdot\frac{1}{h}.$$

D'autre part, d'après (4), nous avons

$$\left|\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right| \leqq k+1$$

donc

$$(5) \qquad |\overline{\varphi}'(x_0) - \overline{\psi}'(x_0)| \leqq \frac{k+1}{h}|\varphi'(\xi_0) - \psi'(\xi_0)| < \frac{(k+1)\varepsilon}{h} = \frac{(k+1)\varepsilon}{2^n(b-a)}.$$

Il suit immédiatement de la formule (5): si l'on a dans le plan ξ, η deux courbes qui se touchent en un point

$$\xi_0, \eta_0 \quad \left(0 < \xi_0 < \frac{1}{2^n},\ 0 < \eta_0 < 1,\ \eta_0 \neq \frac{p}{k+1}\right)$$

et dont la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des η, les courbes correspondantes dans le plan x, y sont aussi tangentes au point correspondant au point ξ_0, η_0.

4. Soient $y = f_1^*(x)$ et $y = f_2^*(x)$ deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre définies pour $a \leqq x \leqq b$ et telles que $0 \leqq f_1^*(x) \leqq f_2^*(x)$. Construisons une famille de courbes de la manière suivante

$$y = \theta[f_2^*(x) - f_1^*(x)] + f_1^*(x) = \Phi(x, \theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Quelle que soit la valeur de $\theta = \theta_0$, nous avons

$$f_1^*(x) \leqq \Phi(x, \theta_0) \leqq f_2^*(x),$$
$$\frac{\partial \Phi(x, \theta_0)}{\partial x} = \theta[f_2^{*\prime}(x) - f_1^{*\prime}(x)] + f_1^*(x),$$

donc la valeur de $\frac{\partial \Phi(x,\theta_0)}{\partial x}$ est toujours comprise entre les valeurs de $f_1^{*\prime}(x)$ et $f_2^{*\prime}(x)$.

Il est aisé de voir que pour obtenir toutes les courbes de la famille $\Phi(x,\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, dans le cas $f_1^*(x) < f_2^*(x)$ il suffit de poser $k = 2$, $f_1(x) = f_1^*(x)$, $f_2(x) = f_2^*(x)$ dans la correspondance entre les plans ξ, η et x, y définie au § 3; les courbes $\Phi(x, \theta)$ corresponderont alors aux droites $\eta = c$ telles que $\frac{1}{3} \leqq c \leqq \frac{2}{3}$.

5. Construisons dans le carré A $(0,0)$; $(1,0)$; $(1,1)$; $(0,1)$ du plan x, y le système S du § 2. D'après les propriétés indiquées de ce système, les courbes du système S divisent le carré considéré en une infinité dénombrable d'aires telles que chacune d'elles est limitée par deux courbes du système S et, certaines d'entre elles, encore par un segment de la droite $x=1$. Construisons dans chacune des aires considérées une famille de courbes de la manière suivante: supposons qu'une telle aire est limitée par les courbes $y=\tilde{f}_1^*(x)$ et $y=\tilde{f}_2^*(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $\tilde{f}_1^*(x) \leqq \tilde{f}_2^*(x)$; la famille cherchée sera la famille $\Phi(x,\theta)$ construite dans le § 4, en posant $a=x_1$; $b=x_2$; $f_1^*(x)=\tilde{f}_1^*(x)$ et $f_2^*(x)=\tilde{f}_2^*(x)$. Designons par F la réunion de toutes ces familles. D'après le § 4 et les propriétés du système S, nous avons les propriétés suivantes de la famille F:

1) Quelle que soit la courbe de la famille F, $y=f(x)$, on a $|f'(x)|<\frac{1}{n!}$ pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) Si plusieurs courbes de la famille F passent par un même point, elles ont toutes en ce point la même tangente.

3) À tout point x_0, y_0 du carré consideré et à tout nombre positif ε il correspond toujours un nombre positif ϱ et un nombre A tels qu'en tout point x, y de la courbe de la famille F, $y=f(x)$, intérieur au cercle de rayon ϱ et de centre x_0, y_0 on a $A-\varepsilon<f'(x)<A+\varepsilon$.

6. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ tous les nombres rationnels contenus entre 0 et 1 et soit r_{n_1} le premier nombre satisfaisant à l'inégalité $|r_1-r_{n_1}|<\frac{1}{2}$ et tel que tout point de la droite $x=r_{n_1}$ n'est pas un point de ramification des courbes du système S; un tel nombre existe d'après la propriété 4) du système S. Par la même raison il existe un rectangle A_1 $(r_{n_1},0)$; $(r_{n_1}+m_1,0)$; $(r_{n_1}+m_1,1)$; $(r_{n_1},1)$, $m_1>0$, qui ne contient pas de points de ramification du système S. Donc, dans le rectangle A_1 nous avons un nombre fini, soit k_1, de courbes du système S, deux à deux sans points communs. Soit $y=\varphi_1(x)$; $y=\varphi_2(x)$; $\ldots$; $y=\varphi_{k_1}(x)$ les équations de ces courbes. Soit p_1 le plus petit nombre entier satisfaisant aux inégalités $p_1>k_1+1$ et $2^{p_1}>\frac{k_1+1}{m_1}$. Construisons dans le rectangle A_1 toutes les courbes qui correspondent aux courbes du système S dans le rectangle $(0,0)$; $\left(\frac{1}{2^{p_1}},0\right)$, $\left(\frac{1}{2^{p_1}},1\right)$; $(0,1)$ du plan ξ, η (§ 2) par la correspondance considérée au § 3 en posant $a=r_{n_1}$, $b=r_{n_1}+m_1$, $k=k_1$, $f_1(x)\equiv\varphi_1(x)$; $f_2(x)\equiv\varphi_2(x)$; $\ldots$; $f_k(x)\equiv\varphi_{k_1}(x)$. Nous avons donc dans le corré un nouveau système, soit S_1, de courbes continues.

D'après les propriétés du système S et le caractère de la correspondance considérée au § 3 nous avons les propriétés suivantes du système S_1:

1) Quelle que soit la courbe du système S_1, $y = \psi(x)$, et la courbe de la famille F, $y = \varphi(x)$, avec $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, nous avons $|\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{1}{p_1!}$.

En effet la courbe $y = \psi(x)$ du plan x, y correspond à une certaine courbe $\eta = \overline{\psi}(\xi)$ du système S dans le plan ξ, η. D'autre part en vertu de la remarque à la fin du § 4, la courbe $y = \varphi(x)$ dans le plan x, y correspond à une droite $\eta = c$ du plan ξ, η. Mais d'après la propriété 1) du système S pour $\xi < \frac{1}{2^{p_1}}$ on a $|\overline{\psi}'(\xi)| < \frac{1}{p_1!}$. Il s'en suit, d'après la formule (5) du § 3

$$|\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{(k_1+1)\frac{1}{p_1!}}{2^{p_1} m_1} = \frac{1}{p_1!}\,\frac{k_1+1}{m_1 2^{p_1}} < \frac{1}{p_1!}.$$

2) Si deux courbes du système S_1 ont un point commun, ils ont la même tangente en ce point.

3) Quelle que soit la droite $x = a$, $a \neq 0$ et $a \neq r_{n_1}$, nous avons toujours sur cette droite un nombre fini de points des courbes du système S_1.

4) Quelle que soit l'aire fermée n'ayant pas de points sur les droites $x = 0$ et $x = r_{n_1}$, il-y-a au plus un nombre fini de points de ramification des courbes du système S_1.

5) Quel que soit le point P de la droite $x = 0$ ou $x = r_{n_1}$, il existe toujours au moins deux courbes du système S_1 passant par le point P et ne coïncidant dans aucun intervalle.

Les courbes du système S_1 étant construites, en appliquant le procédé du § 5 nous construirons les courbes d'une famille F_1, ayant les propriétés suivantes:

1) Quelle que soit la courbe de la famille F_1, $y = \varphi_1(x)$, et la courbe de la famille F, $y = \varphi(x)$, avec $\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0)$, nous avons $|\varphi_1'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{1}{p_1!}$.

On démontre cette propriété par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour démontrer la propriété 1) du système S_1.

2) Si plusieurs courbes de la famille F_1 passent par un point, elles ont en ce point la même tangente.

3) La propriété 3) de la famille F.

Supposons qu'on peut construire les systèmes S_ν et les familles F_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, \lambda)$ ayant les propiétés suivantes:

Le système S_ν:

1) Quelle que soit la courbe $y=\psi(x)$ du système S_ν et la courbe $y=\varphi(x)$ de la famille $F_{\nu-1}$, telles que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$, on a $|\psi'(x_0)-\varphi'(x_0|<\frac{1}{p_\nu!}$.

2) Si deux courbes du système S_ν ont un point commun, elles ont la même tangente en ce point.

3) Quelle que soit la droite $x=a$, $a+0$, $a+r_{n_1}$, $a+r_{n_2}$, ..., $a+r_{n_\nu}$, nous avons toujours sur cette droite un nombre fini de points des courbes du système S_ν.

4) Quelle que soit l'aire fermée, n'ayant pas de points sur les droites $x=0$, $x=r_{n_1}$, $x=r_{n_2}$, ..., $x=r_{n_\nu}$, il-y-a au plus un nombre fini de points de ramification des courbes du système S_ν.

5) Quel que soit le point P de la droite $x=0$, ou $x=r_{n_1}$, ou $x=r_{n_2}$, ..., ou $x=r_{n_\nu}$, il existe toujours au moins deux courbes du système S_ν passant par le point P et ne coïncidant dans aucun intervalle.

La famille F_ν:

1) Quelque soit la courbe de la famille F_ν, $y=\varphi(x)$, et la courbe de la famille $F_{\nu-1}$, $y=\psi(x)$, telles que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$, nous avons $|\psi'(x_0)-\varphi'(x_0)|<\frac{1}{p_\nu!}$.

2) Si plusieurs courbes de la famille F_ν passent par un point, elles ont en ce point la même tangente.

3) La propriété 3) de la famille F.

Construisons le système $S_{\lambda+1}$ et la famille $F_{\lambda+1}$. Soit $r_{n_{\lambda+1}}$, $n_{\lambda+1}>n_\lambda$, le premier nombre rationnel satisfaisant à l'inégalité $|r_{\lambda+1}-r_{n_{\lambda+1}}|<\frac{1}{2^{\lambda+1}}$ et tel que tout point de la droite $x=r_{n_{\lambda+1}}$ n'est pas un point de ramification des courbes du système S_λ, un tel nombre existant d'après la propriété 4) du système S_λ. Par la même raison il existe un rectangle $A_{\lambda+1}$ $(r_{n_{\lambda+1}}, 0)$; $(r_{n_{\lambda+1}}+m_{\lambda+1}, 0)$; $(r_{n_{\lambda+1}}+m_{\lambda+1}, 1)$; $(r_{n_{\lambda+1}}, 1)$. $m_{\lambda+1}>0$, qui ne contient pas des points de ramification du système S_λ. Donc, d'après la propriété 3) du système S_λ, dans le rectangle $A_{\lambda+1}$ nous avons un nombre fini, soit $k_{\lambda+1}$, de courbes du système S_λ, deux à deux sans points communs. Soient $y=\varphi_1^{(\lambda)}(x)$; $y=\varphi_2^{(\lambda)}(x)$; ...; $y=\varphi_{k_{\lambda+1}}^{(\lambda)}(x)$ les équations de ces courbes. Soit $p_{\lambda+1}$ le plus petit nombre entier satisfaisant aux inégalités: $p_{\lambda+1}>p_\lambda$, $p_{\lambda+1}>k_{\lambda+1}+1$ et $2^{p_{\lambda+1}}>\frac{k_{\lambda+1}+1}{m_{\lambda+1}}$. Construisons dans le rectangle $A_{\lambda+1}$ toutes les courbes qui correspondent aux courbes du système S dans le rectangle $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{2^{p_{\lambda+1}}}, 0\right)$; $\left(\frac{1}{2^{p_{\lambda+1}}}, 1\right)$; $(0, 1)$ du plan ξ, η (§ 2) par la correspondance considérée au § 3, en posant $a = r_{n_{\lambda+1}}$, $b = r_{n_{\lambda+1}} + m_{\lambda+1}$, $k = k_{\lambda+1}$ et $f_1(x) \equiv \varphi_1^{(\lambda)}(x)$; $f_2(x) \equiv \varphi_2^{(\lambda)}(x)$; ...; $f_k(x) \equiv \varphi_{k_{\lambda+1}}^{(\lambda)}(x)$. Les courbes construites et les courbes du système S_λ forment le système $S_{\lambda+1}$. Le système $S_{\lambda+1}$ étant construit, en appliquant un procédé tout analogue au procédé du § 5, nous construirons les courbes d'une famille $F_{\lambda+1}$. Il est facile de démontrer que le système $S_{\lambda+1}$ et la famille $F_{\lambda+1}$ ont des propriétés respectivement indiquées pour le système S_ν et pour la famille F_ν; pour les obtenir nous devons poser $\nu = \lambda + 1$.

Designons par Σ la réunion des courbes de tous les systèmes S_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. D'après les propriétés des systèmes S_ν nous avons immédiatement les propriétés suivantes du système Σ:

1) Quel que soit le point P situé sur la droite $x = r_{n_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ il existe au moins deux courbes du système Σ définies dans l'intervalle $(r_{n_\nu}, r_{n_\nu} + m_\nu)$, passant par le point P et ne coïncidant dans aucun intervalle.

2) Si deux courbes du système Σ ont un point commun, ils ont la même tangente en ce point.

Nous allons démontrer encore la propriété essentielle suivante:

3) La propriété 3) de la famille F.

En effet, soit n le plus petit nombre entier tel que $\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{p_\nu!} < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons la famille F_n; d'après la propriété 3) de cette famille il correspond au point x_0, y_0 et au nombre positif ε un nombre positif ϱ et un nombre A tels qu'en tout point de la courbe $y = \varphi(x)$ de la famille F_n, intérieur au cercle C de rayon ϱ et de centre x_0, y_0, on a $|A - \varphi'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $y = \psi(x)$ une courbe quelconque du système Σ ayant des points dans le cercle C et soit x_1, y_1 un point quelconque de cette courbe intérieur au cercle C. La courbe $y = \psi(x)$ appartient à un système S_m; deux cas sont possibles: 1° $m \leq n$, donc la courbe $y = \psi(x)$ appartient à la famille F_n et nous avons $|A - \psi'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 2° $m > n$, soit $m = n + p$; soient $y = \varphi_n(x)$; $y = \varphi_{n+1}(x)$; ...; $y = \varphi_{n+p-1}(x)$ les équations des courbes des familles F_n, F_{n+1}, ..., F_{n+p-1} passant par le point x_1, y_1; nous avons $|A - \varphi_n'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, d'après la propriété 1) des familles F_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nous avons successivement $|\varphi_n'(x_1) - \varphi_{n+1}'(x_1)| < \frac{1}{p_n!}$; $|\varphi_{n+1}'(x_1) - \varphi_{n+2}'(x)| < \frac{1}{p_{n+1}!}$; ...; $|\varphi_{n+k-2}'(x_1) - \varphi_{n+k-1}'(x_1)| < \frac{1}{p_{n+k-2}!}$ et d'après la propriété 1) des systèmes S_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nous avons $|\varphi_{n+k-1}'(x_1) - \psi'(x_1)| < \frac{1}{p_{n+k-1}!}$, donc $|\varphi_n'(x_1) - \psi'(x_1)| < \frac{1}{p_n!} + \frac{1}{p_{n+1}!} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|A - \psi'(x_1)| < \varepsilon$, ce qui prouve la proposition.

7. Soit E l'ensemble des points de toutes les courbes du système Σ, l'ensemble $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_\lambda}, \ldots$ étant partout dense dans l'intervalle $(0, 1)$ de l'axe des x, l'ensemble E est partout dense dans le carré considéré. Construisons dans E la fonction $f_1(x, y)$ de la manière suivante: le point x_0, y_0 étant contenu dans l'ensemble E, nous prenons une courbe quelconque du système Σ passant par ce point, soit $y = \varphi(x)$, et posons $f_1(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$; d'après la propriété 2) du système Σ la fonction $f_1(x_0, y_0)$ ainsi définie est unique. Définissons dans le carré $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 1)$; $(1, 0)$ une fonction $f(x, y)$ égale au minimum de $f_1(x, y)$ en tout point x, y du carré, ce qui est possible puisque l'ensemble E est partout dense sur ce carré. D'après la propriété 3) du système Σ la fonction $f(x, y)$ ainsi définie est partout continue.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

D'après la définition de la fonction $f(x, y)$, chaque courbe du système Σ sera une courbe intégrale de l'équation (1), donc, quel que soit le point P situé sur l'une quelconque des droites $x = 0$; $x = r_{n_1}$; $x = r_{n_2}$; $\ldots$; $x = r_\lambda^n$; $\ldots$ il existe au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par ce point P. Nous allons démontrer que pour tout point du carré il existe au moins deux courbes intégrales distinctes passant par ce point. En effet supposons que par un point x_0, y_0 il ne posse qu'une seule courbe intégrale de l'équation (1). Soit C cette courbe. D'autre part, l'ensemble R des points $\{r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_\lambda}, \ldots\}$ est partout dense sur l'intervalle $(0, 1)$; donc quelque petit que soit ε, il existe toujours dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ des points de l'ensemble R; soit r_{n_λ} le premier d'entre eux. Menons par ce point r_{n_λ} la droite $x = r_{n_\lambda}$ et soit (r_{n_λ}, y_1) le point d'intersection de cette droite et de la courbe C. Mais, d'après la propriété 1) du système Σ il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation (1) passant par le point (r_{n_λ}, y_1) et distinctes dans tout intervalle $(r_{n_\lambda}, r_{n_\lambda} + \eta)$, $\eta > 0$, pour η assez petit. η étant assez petit, l'intervalle $(r_{n_\lambda}, r_{n_\lambda} + \eta)$ est contenu dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Nous allons montrer que c'est impossible. En effet M. Osgood[3]) a démontré le théorème suivant:

---

[3]) „Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung", Monatshefte f. Math. u. Phys. **9** (1898), S. 343.

La fonction $f(x, y)$ étant continue par rapport à l'ensemble des variables x, y; $a_1 < x < a_2$; $b_1 < y < b_2$; il existe pour tout point, $a_1 < x_0 < a_2$; $b_1 < y_0 < b_2$, deux courbes intégrales $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de l'équation (1) passant par ce point et telles que toute autre courbe intégrale $y = \varphi(x)$ passant par le même point vérifie les inégalités

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi_2(x)$$

quel que soit x dans un certain intervalle $(x_0 - \varrho,\ x_0 + \varrho)$.

Voici une conséquence de ce théorème: si la courbe C est la seule courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point x_0, y_0 on voit que pour un nombre ε assez petit et pour tout point x_2, y_2 $(x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon)$ de la courbe C il n'existe aucune courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point x_2, y_2 et ne coïncidant pas avec la courbe C dans l'intervalle $(x_2, x_0 + \varepsilon)$.

Nous voyons donc que la courbe C n'est pas la seule courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point x_0, y_0, contrairement a notre hypothèse. Ainsi quel que soit le point du carré $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$ il existe au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par ce point, ce qu'il fallait démontrer.

Moscou, 12. VI. 1924.

(Eingegangen am 18. Juli 1924.)