telle que $\Sigma \log b_\nu / a_\nu$ *est fini, on a, pour* $r > r_0$, *en chaque point* $re^{i\varphi}$ *de l'arc* θ_r,

$$\sigma(re^{i\varphi}) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\theta(r)}. \tag{1}$$

Soit $\omega(r)$ l'oscillation de $\sigma(re^{i\varphi})$ sur l'arc θ_r. Alors la longueur de l'image de θ_r est au moins $\sqrt{1+\omega(r)^2}$, d'où nous tirons, en utilisant d'abord l'inégalité de Schwarz, puis en intégrant de r_0 à r,

$$1+\omega(r)^2 \leqq \left[\int_{\theta_r} |s'(re^{i\varphi})|\, r\, d\varphi\right]^2 \leqq 2\pi r\theta(r)\int_{\theta_r} |s'(re^{i\varphi})|^2\, r\, d\varphi,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\theta(r)} + \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{\omega(r)^2}{r\theta(r)}\,dr \leqq \int_{r_0}^{r} dr \int_{\theta_r} |s'(re^{i\varphi})|^2\, r\, d\varphi.$$

L'intégrale double représente une aire, située dans la bande B, qui est $< \sigma(re^{i\varphi}) + \omega(r)$. Nous avons donc, en observant que $\theta(r) \leqq 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\theta(r)} + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{\omega(r)^2}{r}\,dr - \omega(r)\right] \leqq \sigma(re^{i\varphi}).$$

La circonstance que la parenthèse au premier membre est négative peu être exprimée par

$$\frac{dr}{r} < 4\pi^2 \frac{d\alpha(r)}{\alpha(r)^2} \qquad \text{où} \qquad \alpha(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\omega(r)^2}{r}\,dr.$$

Donc la parenthèse en question ne peut être négative que dans une suite d'intervalles dans laquelle la variation de $\log r$ ne surpasse pas celle de la fonction négative, non décroissante $-\frac{4\pi^2}{\alpha(r)}$, variation qui est évidemment finie.

C. Q. F. D.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur un problème de M. P. Montel.* Note de M. M. LAVRENTIEFF, présentée par M. Hadamard.

Soit

$$P_1(z),\ P_2(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots \tag{1}$$

une suite de polynomes en la variable complexe z, convergente en chaque point du cercle $|z| < 1$. M. Montel a posé le problème général suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(z)$ puisse être considérée comme la limite de la suite (1)?

D'après les résultats connus de MM. Osgood et Montel, la fonction $f(z)$ est analytique, sauf aux points d'un ensemble E, fermé et partout non dense.

MM. Rosenthal et Hartogs d'une part, M. Lavrentieff d'autre part ont résolu complètement le problème de déterminer la structure de l'ensemble E des points irréguliers de la fonction $f(z)$.

MM. Rosenthal et Hartogs ont traité de même le problème général et ont trouvé les conditions cherchées, mais ces conditions ne donnent pas la structure de la fonction $f(z)$.

Le but de cette Note est d'énoncer quelques résultats qui se rattachent à la structure de la fonction $f(z)$.

Posons la définition suivante :

Définition I. — Nous disons que *l'ensemble* E, fermé et partout non dense, *est un ensemble* M^*, si, quel que soit l'ensemble E_1, fermé et contenu dans E, il existe toujours une portion de E_1, soit E_2, telle que l'ensemble complémentaire de E_2 est un domaine connexe.

Cela posé on peut démontrer le théorème :

Théorème I. — *Pour qu'une fonction $f(z)$ définie dans le cercle $|z| < 1$ soit la limite de la suite* (1), *il est suffisant qu'il existe un ensemble* F, *fermé, partout non dense, contenu dans le cercle $|z| < 1$ et jouissant des propriétés suivantes :*

1. E *est un ensemble* M^*.

2. $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ *en chaque point de* E, *les fonctions étant des fonctions quelconques de classe* 1 *au sens de M. Baire.*

3. $f(z) = f_n(z)$ *dans* D_n, $f_n(z)$ *étant une fonction analytique, régulière dans* D_n *et* D_n *un domaine connexe quelconque contigu à* E.

Définition II. — Nous disons qu'*une fonction* $f(z)$, représentable par une suite (1), *est une fonction* M^* si $f(z)$ est analytique en dehors d'un ensemble E, E étant un ensemble M^*.

Alors, la classe des fonctions M^* est la classe la plus générale des fonctions $f(z)$ [représentables par les suites (1)] dans laquelle les fonctions φ, ψ et $f_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont indépendantes.

En effet, on peut démontrer les propositions suivantes :

Théorème II. — *Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions représentables par des suites* (1). *Supposons qu'il existe un ensemble* E *fermé, partout non dense, qui n'est pas un ensemble* M^* *et tel que* $f(z) = \varphi(z)$ *en chaque point de* E. *Alors, il existe une infinité dénombrable de domaines* $D_1, D_2, D_3, \ldots D_n, \ldots$ *tels que* $f(z) = \varphi(z)$ *en chaque point de* $D_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

THÉORÈME III. — *Soit* E *un ensemble fermé qui n'est pas un ensemble* M*; *on peut toujours construire sur* E *deux fonctions de classe* 1, $f(x, y)$ *et* $\varphi(x, y)$, *telles qu'il n'existe aucune suite* (1), *convergente en chaque point de* E, *pour laquelle on a*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(z) = f(x, y) + i\varphi(x, y),$$

en chaque point de E.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur les groupes fonctionnels.* Note de M. **Gr. C. Moisil**, présentée par M. Hadamard.

Un groupe de transformations à un paramètre fonctionnel $a(s)$ est défini par :

$$\bar{x}(s) = f\left|[x(\sigma), a(\sigma) \mid s]\right|, \tag{1}$$

$$\bar{\bar{x}}(s) = f\left|[\bar{x}(\sigma), b(\sigma) \mid s]\right|, \tag{2}$$

$$\bar{\bar{x}}(s) = f\left|[x(\sigma), c(\sigma) \mid s]\right|, \tag{3}$$

$$c(s) = \varphi\left|]a(\sigma), b(\sigma) \mid s]\right|. \tag{4}$$

Je suppose que la correspondance (1) entre $x(s)$ et $\bar{x}(s)$ est localement biunivoque, que le paramètre $a(s)$ est essentiel et que les fonctionnelles considérées sont continues d'ordre o et dérivables. Dans ces conditions, le premier théorème de S. Lie est généralisé par

$$\left\{\begin{aligned} & \bar{x}'_{a(s)}(s) = \xi\left|[\bar{x}(\sigma) \mid s]\right| \alpha\left|[a(\sigma) \mid s]\right|, \\ & \bar{x}'_{a(\sigma)}(s) = \xi\left|[\bar{x}, s]\right| \alpha\left|[a \mid s\sigma]\right| + \xi\left|[\bar{x} \mid \sigma s]\right| \alpha\left|[\dot{a} \mid \sigma]\right| \\ & \qquad + \int_0^1 \xi\left|[\bar{x} \mid \rho s]\right| \alpha\left|[\rho\sigma]\right| d\rho, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

qu'on peut écrire

$$\delta\bar{x}(s) = \xi(s)\omega(s) + \int_0^1 \xi(\sigma s)\omega(\sigma)\, d\sigma. \tag{6}$$

$\xi(s)$, $\xi(\sigma, s)$ est la transformation infinitésimale du groupe et $\omega(s)$ une forme linéaire de variations fonctionnelles, propre

$$\left\{\begin{aligned} & \dot{\omega}(s) = \alpha(s)\,\delta a(s) + \int_0^1 \alpha(s\sigma)\,\delta a(\sigma)\, d\sigma, \\ & \delta a(s) = \alpha(\overset{*}{s})\,\omega(s) + \int_0^1 \alpha(\overset{*}{\sigma}\overset{*}{s})\,\omega(\sigma)\, d\sigma, \end{aligned}\right. \tag{7}$$