ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

Теория функций комплексного переменного представляет собой одну из ветвей анализа, которая находится в непосредственном контакте не только с самыми разнообразными отделами самой математики, но также играет основную роль в ряде вопросов механики непрерывной среды. В соответствии с этим в теории функций комплексного переменного, развивавшейся за последние 15 лет исключительно быстро, мы имеем в настоящее время крайнее разнообразие как проблем, так и методов их разрешения. Нам представляется возможным, оставаясь в рамках чистой математики, отметить следующие основные направления в развитии этой теории.

1) Геометрическая теория функций, куда относятся изучение конформных отображений, проблемы униформизации и связанное с этим изучение римановых поверхностей, проблемы абсолютны констант (в главной своей части). 2) Изучение функций в области их существования по их особенностям; сюда относится теория целых и мероморфных функций с проблемами интерполяции и конечноразностными методами, в частности, соприкасающихся с теорией чисел. 3) Область, методологически связанная с теорией функций действительного переменного — сходимость ряда Тейлора на круге сходимости, общие проблемы представимости функции по ее значениям на некотором множестве, значения функций на границе области существования. 4) Аналитическая теория функций, куда входят специальные функции, разложения функций в ряды и бесконечные произведения; сюда же можно отнести аналитическую теорию диференциальных уравнений; и, наконец, 5) Теория функций многих комплексных переменных.

За 15 лет в СССР велась интенсивная работа почти во всех отмеченных направлениях. Наиболее сильные и далеко идущие результаты были получены по четвертой теме в Ленинграде в работах Лаппо-Данилевского по аналитической теории диференциальных уравнений и по второй теме в Москве в работах Гельфонда по приложениям теории целых функций к теории чисел.

В дальнейшем мы прореферируем основные работы проделанные советскими учеными в отмеченных выше направлениях, причем ввиду обилия и разнообразия материала эти рефераты не претендуют на полноту и имеют целью дать только основные вехи в работах.

В эти рефераты не войдут прежде всего — работы, производившиеся на Украине, которые прореферированы ниже, в части этой статьи, принадлежащей В. Л. Гончарову, и работы по аналитической теории диференциальных уравнений, а также останутся почти совершенно незатронутыми вопросы, связанные с приложениями теории функций к смежным областям, ибо все эти работы войдут в настоящий сборник в обзоры работ по соответствующим разделам.

Материалом для составления этого реферата, помимо оригинальных работ, послужил также аналогичный обзор за первые 10 лет, составленный М. А. Лаврентьевым и И. И. Приваловым.

§ 1. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Функции $w=f(z)$, реализующие конформное отображение круга $|z|<1$ на односвязные области, называемые однолистными в единичном круге, представляют один из простейших классов аналитических функций и обладают многими замечательными свойствами, им присущими. Работа в этом направлении далеко еще не закончена и продолжает привлекать многочисленных исследователей, как иностранных, так и советских. Детальное изучение однолистных функций, имея большой научный интерес, само по себе также всегда богато приложениями как в самой теории функций комплексного переменного, так и в ряде вопросов анализа, гидродинамики и теории упругости. Изучение функций голоморфных в любой односвязной области может быть сведено при помощи конформного отображения к изучению функций голоморфных внутри круга, что обычно сильно облегчает задачу; кроме того, многим свойствам однолистных функций можно найти аналогии для функций, просто правильных в данной области; этим самым изучение однолистных функций может помочь в поисках новых предложений в общей теории функций.

В теории конформных отображений можно выделить четыре группы проблем: 1) проблемы существования и конструирования отображений; 2) поведение однолистной функции внутри круга; 3) поведение однолистной функции на границе; 4) приложения метода конформных отображений к задачам гидродинамики и теории упругости.

Мы остановимся здесь лишь на первых трех группах проблем, ибо работы прикладного характера будут отмечены в соответствующих обзорах по анализу и по механике непрерывной среды; отметим лишь, что главные результаты, полученные здесь за 15 лет, принадлежат С. А. Чаплыгину, А. А. Вальтеру (приложеня к гидродинамике) и Колосову, Н. И. Мусхелишвили, Смирнову и Соболеву (приложения к теории упругости.)

1. Начнем с проблем существования. Как известно, общая задача конформного преобразования двух односвязных областей сводится к следующей. В плоскости комплексного переменного w дана односвязная область D; требуется построить аналитическую функцию комплексного переменного z, $w = f(z)$, обладающую следующими свойствами:

1) $f(z)$ правильна внутри круга $|z| < 1$;

2) для двух различных значений z ($|z| < 1$) $f(z)$ принимает различные значения;

3) множество значений $f(z)$ ($|z| < 1$) есть область D.

Carathéodory впервые показал, что какова бы ни была односвязная область D, граница которой содержит, по крайней мере, две точки, всегда существует функция $f(z)$, обладающая указанными свойствами, тем самым решив общую задачу конформного отображения.

Дальнейшие работы в этом направлении касались распространения теоремы Carathéodory на случай, когда D есть область на поверхности Римана (Riemann) (проблема униформизации). Этой проблеме в СССР была посвящена интересная работа В. И. Смирнова «О приложении принципа сходимости к теории униформизации»[1], в которой, пользуясь принципом сходимости Arzelà, доказывается возможность конформного отображения односвязной поверхности Римана с бесконечным множеством листов на круг или на всю конечную плоскость.

В другой своей работе «О конформном преобразовании односвязной области в себя»[2] тот же автор показывает, что если односвязная область допускает конформное отображение на круг, но сама отлична от круга, то всякое конформное преобразование такой области в себя с неподвижной точкой внутри, в котором угол поворота несоизмерим с π, не может быть линейным. Этот результат является важным дополнением к известной теореме единственности конформных отображений Пуанкаре (Poincaré).

Для приложений конформных преобразований, на ряду с теоремами существования, особо важную роль играют вопросы о представлении в конечном виде функций, реализующих конформное отображение круга на области частного вида, а также вопросы приближенного представления этих функций. С. А. Чаплыгин, а затем независимо М. В. Келдыш дали полное решение (в эллиптических функциях) задачи конформного отображения внешности двух отрезков (непересекающихся) на кольцо $r < |z| < R$. Этой теме в заграничной литературе за последние годы был посвящен ряд работ, в которых, однако, были разобраны лишь отдельные частные случаи этой задачи. Отметим здесь также работу

---

1) «Изв. Харьк. мат. о-ва», т. 16, 1918.

2) «Изв. мат. каб. Тавр. ун-та», 1920.

П. А. Фока «О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на полуплоскость»[3]), в которой рассматривается отображение упомянутого четырехугольника на прямоугольник и показывается, что это последнее дается частным двух интегралов уравнения типа Lamé, причем автор выводит формулы, дающие возможность вычислять параметры, входящие в это уравнение Lamé, если задан конкретный четырехугольник с нулевыми углами.

В направлении приближенного представления конформных отображений у нас работа началась лишь в самые последние годы. Отметим здесь, прежде всего, работу Канторовича, в которой автор, пользуясь тригонометрическими рядами, дает сходящийся процесс для получения конформного отображения круга на односвязную область, близкую к кругу. Метод Канторовича, на наш взгляд, имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами, предложенными для решения той же задачи.

В совместной работе М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев показали, что один из процессов, указанных Julia для приближенного конформного отображения, сходится не только внутри области (как показал Julia), но и на границе.

К этому же кругу вопросов относятся заметка М. А. Лаврентьева «Sur une méthode géometrique dans la représentation conforme»[4]) и часть совместной работы В. К. Гольцмана и М. А. Лаврентьева «Sur l'existence des dérivée-limites»[5]). В этих работах авторы показывают, что конформное отображение треугольника на область D можно получить как предел гомеоморфного соответствия сети равносторонних треугольников и сети треугольников, заполняющей D и обладающей некоторыми простыми минимальными свойствами.

Также к проблемам существования, но стоящим несколько в стороне от проблем этой группы, которыми мы занимались до сих пор, относятся чрезвычайно сильные результаты Д. Е. Меньшова. Из классической теории аналитических функций известно, что наличие у функции комплексного переменного $f(z)$ производной в каждой точке некоторой области влечет за собой существование производных любого порядка, возможность разложения в ряд Тейлора, т. е. голоморфность функции. Естественно, что с развитием общей теории функций был поставлен вопрос большого принципиального значения. Даны две односвязные области D и D_1, и между точками этих областей установлено взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие; спрашивается, каковы те минимальные условия, которым должно удовлетворять это соответствие, чтобы функция комплексного переменного, определяемая этим соответствием, была голоморфной (соответствие было конформным).

---

3) «Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва», т. I, в. 2, 1927.
4) «Труды Международного мат. съезда», 1928.
5) «Мат. сб.», т. XXXVIII, 3–4, 1931.

Этой проблеме за последние 15 лет был посвящен ряд работ Бора (Bohr), Ломана (Looman) и др. Наиболее полные результаты в этом направлении были получены Д. Е. Меньшовым. В своей первой работе [6]) на эту тему он показал, что если в силу соответствия две кривые области D, соответствующие двум производным кривым области D_1, пересекающимся под углом α, будут также пересекаться под углом α (каково бы ни было α), то функция, определяемая этим соответствием, есть голоморфная. В своих дальнейших работах [7]) Меньшов получил результат исключительной силы, завершающий все предыдущие работы. Итак, пусть между областями D и D_1 установлено взаимно однозначное соответствие, реализуемое фунцией $w=f(z)$. Мы скажем, что в точке z_0 области D имеет место свойство A, если из этой точки можно провести три вектора (один не служит продолжением другого), которые перейдут в области D_1 в три кривые, пересекающиеся под теми же углами (принимая во внимание положительное направление вращения). Мы скажем, что в точке z_1 области D имеет место свойство B, если из этой точки можно выпустить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такие, что 1) вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перейдут в кривые, пересекающиеся под углом, равным углу между векторами (с учетом направления поворота), 2) модули производных функции $f(z)$ в направлениях $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существуют и равны между собой. Мы скажем, что в точке z_2 имеет место свойство C, если из z_2 можно выпустить три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (один не служит продолжением другого), такие, что модули производных $f(z)$ по направлениям $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ существуют и равны друг другу. При этих определениях Меньшов показал, что если в точке D имеет место одно из свойств A, B или C, то $f(z)$ — голоморфная функция.

2. Перейдем к реферированию работ, касающихся поведения однолистных функций внутри области.

Итак, пусть

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \tag{1}$$

аналитическая функция, голоморфная и однолистная при $|z|<1$; для простоты мы предполагаем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, так как общий случай приводится к этому линейным преобразованием. Koebe впервые установил существование верхней и нижней границы $|f'(z)|$ характеризующее изменение масштаба при конформном отображении, причем упомянутые границы не зависят

[6]) Sur la représentation conforme des domaines plans, «Math. Ann.», 1926.

[7]) Sur la représentation conforme des domaines plans, «C. R.», 1928, Sur les fonctions monogénes, Bull. de la Soc. Math. de France, 1932. Sur le représentation conforme des domaines plans, «Зап. Международного конгресса математиков», 1928.

от функции $f(z)$. Впоследствии для этих границ были найдены точные значения. И. И. Привалов в своей работе «О функциях, дающих однолистное конформное отображение»[8]) исследовал теорему Koebe и связанные с ней предложения *искажения* для функций $f(z)$, дающих конформное отображение круга на области специального вида. Обозначим через

(K) — совокупность всех функций (1), дающих конформные отображения круга $|z|<1$ на *выпуклые* области.

(K_s) — совокупность всех функций (1), дающих конформные отображения круга $|z|<1$ на области *выпуклые и симметричные.*

(K^*) — совокупность всех функций (1), дающих конформные отображения круга $|z|<1$ на *звездообразные* области.

(K_s^*) — совокупность всех функций (1), дающих конформные отображения круга $|z|<1$ на области *звездообразные и симметричные.*

При этих обозначениях доказываются следующие предложения: какова бы ни была функция $f(z)$ одного из указанных семейств K, K_s, K^*, K_s^*, имеем:

$$\begin{array}{l} m(r)\leqslant|f'(z)|\leqslant M(r) \\ p(r)\leqslant|f(z)|\leqslant P(r), \end{array} \quad \text{для } |z|=r,$$

причем 1) для функций класса K:

$$M(r)=\frac{1}{(1-r)^2}, \quad m(r)=\frac{1}{(1+r)^2}; \quad P(r)=\frac{r}{1-r}, \quad p(r)=\frac{r}{1+r}.$$

2) для класса K_s:

$$M(r)=\frac{1}{1-r^2}, \quad m(r)=\frac{1}{1+r^2}; \quad P(r)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \quad p(r)=\operatorname{arc\,tg} r.$$

3) для класса K^*:

$$M(r)=\frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad m(r)=\frac{1-r}{(1+r)^3}, \quad P(r)=\frac{r}{(1-r)^2},$$

$$p(r)=\frac{r}{(1+r)^2}.$$

4) для класса K_s^*:

$$M(r)=\frac{1+r^2}{(1-r^2)^2}, \quad m(r)=\frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}; \quad P(r)=\frac{r}{1-r^2}, \quad p(r)=\frac{r}{1+r}.$$

---

[8]) «Мат. сб.», т. 31, 1924.

Все указанные границы суть точные, как показывают примеры

1) $w=\frac{z}{1-z}$, 2) $w=\operatorname{arc\,tg} z$, 3) $w=\frac{z}{(1-z)^2}$, 4) $w=\frac{z}{1+z^2}$.

В дополнение к теореме *искажения* Koebe, Bieberbach установил теорему *вращения*, показав, что существует верхняя граница для $|\arg f'(z)|$, не зависящая от природы функции $f(z)$, дающей однолистное конформное отображение круга $|z|<1$. Более точно: $|\arg f'(z)|<2\ln\frac{1+r}{1-r}$. В цитированной работе рассматривается это предложение в случае внешней задачи.

Если через (O) обозначено семейство функций

$$w=w(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots,$$

дающих однолистное конформное отображение области $|z|>1$, то доказывается следующая теорема.

Существует функция $F(r)$ такая, что

$$|\arg w'(z)|\leqslant F(r) \text{ при } |z|\geqslant r>1,$$

какова бы ни была функция $w(z)$ семейства (O).

За функцию $F(r)$ можно взять:

$$F(r)=\frac{2}{\pi}\ln\frac{r}{r-1}\ln\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}.$$

Ряд интересных результатов был также получен Г. М. Голузиным[9]) «О некоторых оценках, относящихся к функциям, совершающим однолистное конформное преобразование круга». Пользуясь единообразным методом, автор дает ряд новых оценок как для любой однолистной функции, так и для функций, реализующих конформное отображение круга на области специального вида.

В основе метода Г. М. Голузина лежит следующая теорема.

Если правильная в единичном круге функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству:

$$|zf'(z)-rN(r)|\leqslant rM(r) \quad (|z|=r),$$

где $N(r)$ комплексная и $M(r)>0$ — заданные функции r, непрерывные при $0\leqslant r<1$, то

$$\int_0^r\left[R(CN)-\sqrt{|CM|^2-I(CN)^2}\right]dr\leqslant R\bigl(Cf(z)\bigr)\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^r\left[R(CN)+\sqrt{|CM|^2-I(CN)^2}\right]dr,$$

где $R(a)$ и $I(a)$ обозначают соответственно действительную и мнимую часть числа a и где C произвольное комплексное число.

9) «Мат. сб.», т. 36, 1929.

Из оценок, добытых Г. М. Голузиным, приведем лишь основные. Сохраняя обозначения, принятые выше, для любой однолистной в единичном круге функции $f(z)$, имеем:

$$|\arg f'(z)| \leqslant \int_0^r \frac{2\sqrt{4-r^2}}{1-r^2}\, dr.$$

Это неравенство есть обобщение цитированной выше теоремы вращения Бибербаха (Bieberbach). Кроме того, автор дает следующие новые оценки:

$$\left|\arg \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}\right| \leqslant \int_0^r \frac{6r\, dr}{(1-r^2)\sqrt{4-r^2}},$$

$$\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| < -\sqrt{3}\ln(1-r) + \frac{r}{2\sqrt{3}}.$$

Обращаясь к классам однолистных функций специального вида, автор, между прочим, получает следующие новые оценки. Если $f(z)$ принадлежит классу K, то

$$\frac{1}{(1+r^m)^2} \leqslant \Pi\, |f'(z\eta_k)| \leqslant \frac{1}{(1-r^m)^2},$$

где η_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ суть корни из 1.

Кроме того:

$$|\Sigma \arg f'(z\eta_k)| \leqslant 2 \arcsin r^m.$$

Если $f(z)$ принадлежит классу K^*, то при тех же обозначениях:

$$\frac{r^m}{(1+r^m)^2} \leqslant \Pi\, |f(z\eta_k)| \leqslant \frac{r^m}{(1-r^m)^2} \quad \tag{1}$$

$$|\Sigma \arg f'(z\eta_k)| \leqslant 2 \arcsin r^m. \quad \tag{2}$$

(границы точные)

Для производных однолистных в единичном круге функций $f(z), f'(0)=1, f(0)=0$ оказалось возможным дать оценки, аналогичные оценкам (1) и (2), правда, значительно менее полные; среди отрезков, соединяющих начало координат с точкой $\frac{\eta_k}{\sqrt[n]{4}}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, существует, по крайней мере, один отрезок, целиком принадлежащий множеству значений $f(z)$, $(z) < 1$. Этот результат при $m=1$ дает известную теорему Koebe-Bieberbach'a, при $m=2$ был установлен Szégö. Н. Е. Кочин[10]) дока-

[10]) «Бюллетень Всесоюзного мат. съезда», 1930.

зал его справедливость при $m=3$, 4; далее, в совместной заметке В. М. Шепелев и М. А. Лаврентьев [11]) указали на справедливость результата в общем случае. В другой заметке М. А. Лаврентьев [12]) решает вопрос о константе Koebe для однолистных функций, удовлетворяющих некоторым геометрическим условиям.

Свойство функции $w=f(z)$ быть однолистной в единичном круге влечет за собой, как показал впервые Bieberbach, ряд свойств семейства линий плоскости w, в которые переходят при отображении $w=f(z)$ окружности $|z|=r<1$. Г. М. Голузин* получил в этом направлении также ряд результатов; процитируем один из них. *Границей выпуклости* $R_k^{(\infty)}$ семейства всех функций $F(z)$ вида

$$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_0+a_1 z+\ldots$$

однолистных и регулярных в круге $|z|<1$, исключая простого полюса при $z=0$, называется верхняя граница всех r, при которых $|z|=r$ преобразуется всеми функциями семейства в выпуклые контура. При таком определении доказывается следующее неравенство:

$$0{,}558<R_k^{(\infty)}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сюда же можно отнести результат Г. В. Корицкого [13]) «Теорема Szegö для некоторых классов однолистных функций», в которой автор доказывает теорему, являющуюся дополнением к одной теореме Bieberbach'а. Теорема Г. В. Корицкого читается так:

Если функция

$$f(z)=z+b_3 z^3+\ldots$$

отображает круг $|z|<1$ на однолистную симметричную относительно точки O звездообразную область, то каково бы ни было нечетное число $n\geqslant 1$, функция

$$s_n(z)=z+b_3 z^3+\ldots+b_n z^n$$

отображает круг $z<\frac{1}{\sqrt{3}}$ также на симметричную однолистную звездообразную область.

К этому же кругу идей относятся два результата, полученные М. А. Лаврентьевым [14]) и заключающиеся в следующем. Пусть D — односвязная область. Относительным расстоянием двух точек w_1 и w_2 области D называется нижняя граница длин полигонов,

---

11) «С. R.», 1931.
12) «С. R.», 1931.
* Цит. под № 9.
13) «Мат. сб.», т. 36, 1929.
14) Sur la représentation conforme, «С. R.» t. 184, 1927.

лежащих в D и соединяющих точки w_1 и w_2. Это число обозначим через $d_r(w_1, w_2)$. Пусть теперь D — односвязная область площади 1 и $z = \varphi(w)$ — функция, дающая конформное отображение области D на круг $|z| < 1$. В предположении, что $\varphi(w_0) = 0$, доказываются следующие предложения:

I. Какова бы ни была точка w, $d_r(w_0, w) > \rho$, имеем

$$1 - |\varphi(w)| < \frac{K_1}{\rho},$$

где K_1 — абсолютная константа, ρ — любое положительное число.

II. Плоскостная мера множества точек круга $|z| < 1$, соответствующих точкам w области D, $d_r(w_0, w) > \rho$, меньше чем $\frac{K_2}{\rho^2}$, где K_2 — абсолютная константа.

Прореферированный цикл вопросов далеко еще не исчерпан; так, например, не найдена точная верхняя грань «вращения»; далее, проблемы «искажения» и «вращения» могут быть поставлены для функций, дающих конформное отображение круга $|z| < 1$ на области постоянной площади, постоянного диаметра и т. п.

Интересно также детально изучить быстроту стремления $|z|$ к единице, когда соответствующая точка w стремится к границе области D; приведенный выше результат М. А. Лаврентьева далеко неполон, и, может быть, введенное им понятие относительного расстояния следует заменить другим, учитывая также искривления полигонов, соединяющих точки w_1 и w_2.

Свойство функции

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \ldots,$$

голоморфной в круге $|z| < 1$, быть однолистной естественно отражается на коэфициентах степенного ряда, ее изображающего. Bieberbach впервые доказал существование последовательности чисел $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$, такой, что для всякой функции указанного вида имеем: $|a_n| \leqslant r_n$, $(n = 2, 3, \ldots)$, и высказал предположение, что $r_n = n$.

И. И. Привалов* дает точные значения для r_n — верхних границ модулей коэфициентов степенного ряда, определяющего функцию $f(z)$, в случаях, когда $f(z)$ отображает круг на области специального вида, рассмотренные в предыдущем параграфе. Доказывается следующее предложение: для всякой функции $f(z)$ одного из четырех классов K, K_s, K^*, K_s^* имеем: $|a_n| \leqslant r_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, причем $r_n = 1, \frac{1}{n}, n, 1$, смотря по тому, принадлежит ли $f(z)$ к классу K, K_s, K^*, K_s^*.

Примеры предыдущего параграфа показывают, что найденные значения r_n суть точные. Это предложение дает, таким образом,

* Цит. под № 8.

полное решение вопроса о росте коэфициентов степенного ряда для однолистных функций специального вида. Что касается произвольной однолистной функции, то соответствующая проблема еще не получила полного разрешения. Доказано, что $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ и, кроме того, при любом n, что $r_n < en$.

Г. М. Голузин в цитированной выше работе несколько дополняет эти результаты: если функция принадлежит классу K и имеет разложение

$$f(z) = z + a_{m+1} \; z^{m+1} + a_{2m+1} \; z^{2m+1} + \ldots,$$

то

$$|a_{nm+1}| \leqslant \frac{1}{nm+1} \; \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{m}\right).$$

Если функция принадлежит классу K^* и имеет разложение (3), то

$$|a_{nm+1}| \leqslant \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{2}{m}\right).$$

Н. Г. Чеботарев[15]) распространил условие (Bieberbach'а—Sitz. Berl. Ak. 1916) того, чтобы заданный полином был однолистный в круге $|z| \leqslant 1$, на любые степенные ряды, сходящиеся внутри $|z| \leqslant 1$. Этот важный результат был получен Н. Г. Чеботаревым применением метода построения результанта для трансцендентных функций[16]).

3. Пусть односвязная область D плоскости w конформно отображена на круг $|z| < 1$. Обозначим через F границу области D. В силу соответствия точек области D и точек круга $|z| < 1$ устанавливается соответствие между точками границы F и точками окружности $|z| = 1$. Carathéodory в 1913 г. впервые исследовал в общем случае характер этого соответствия с точки зрения топологии. В частности, им было показано, что если F есть простая замкнутая линия Jordan'а, то указанное соответствие будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Ценным дополнением к результатам Carathéodory являются работы В. Н. Вениаминова, П. С. Урысона и Ф. И. Франкля, в которых авторы решают проблему, поставленную Carathéodory: может ли односвязная область состоять из простых концов второго рода. В.Н. Вениаминов[17]) показал, что если граница односвязной области D не содержит простых концов третьего и четвертого рода, то граница D содержит концы первого рода, которые при конформном отображении D на круг переходят во множество второй категории. Этим самым В. Н. Вениаминов решил проблему Cara-

---

[15]) Zur Theorie der schlichten Funktionen, Jahrs. D. M. V. 39.

[16]) Исключение из трансцендентных уравнений. Изв. Каз. ф.-м. об-ва. 24 (1924).

[17]) Sur une probléme de la représentation conforme de M. Carathéodory, «Мат. сб.».

théodory в отрицательном смысле. Тот же результат независимо и геометрически был получен П. С. Урысоном.

Ф. И. Франкль [18]) строит пример области D, граница которой не содержит ни одного простого конца первого рода, такую, что при конформном отображении круга на область D каждой точке границы круга отвечает целый континуум точек границы D.

Кроме того, за последнее 10 лет установлен ряд свойств метрического характера, имеющих место при конформном отображении областей с спрямляемыми границами. Основной результат в этом направлении был получен совместно Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым [19]). Если F есть спрямляемая простая замкнутая линия Jordan'a, то всякому множеству точек меры нуль на F соответствует множество точек меры нуль на окружности $|z|=1$; и, обратно, всякому множеству точек меры нуль на окружности соответствует множество точек меры нуль на F.

Таким образом множество точек меры нуль есть инвариант при конформном преобразовании двух областей, ограниченных спрямляемыми кривыми, друг в друга.

Эта теорема имеет многочисленные приложения к общей теории аналитических функций при изучении их поведения вблизи особых линий. Дальнейшие исследования в этом вопросе были направлены на разыскание аналогов этой теоремы для случая, когда D есть любая односвязная область. Общая задача такова: определить классы множеств точек на F, переходящих заведомо во множества точек меры нуль окружности.

Здесь, прежде всего, было обнаружено, что в случае, когда F не есть *спрямляемая* линия Jordan'a, множеству точек меры больше нуля на F может соответствовать на окружности множество точек меры нуль.

В. Н. Вениаминов [20]), занимаясь вопросами, близкими к рассматриваемому, ввел следующее понятие: точка w_0, принадлежащая границе F, называется достижимой углом, если существует угол с вершиной в точке w_0, стороны которого принадлежат области D. Им было показано, что в общем случае множество точек границы F, не достижимых углом, может переходить во множество точек меры 2π на окружности.

Первый положительный результат в этом направлении был получен М. А. Лаврентьевым *.

Точка w_0, принадлежащая границе F, достижима конечным путем, если существует спрямляемая простая дуга Jordan'a, лежа-

---

18) Zur Primendentheorie, «Мат. сб.» XXXVIII, 3—4, 1931.

19) Lusin, Sur la représentation conforme, «Изв. Ив.-Вози. полит. ин-та» № 2, 1919.

Привалов, Интеграл Cauchy, «Научн. зап. Сарат. ун-та», 1919.

Lusin et Priwaloff, Sur l'unicité de la multiplicité des fonctions analytiques, «Ann. de l'Ecole normale», t. 42, 1925.

20) Sur quelques proprietés de la dérivée-limite, «C. R.», т. 180, 1925.

* Цит. под № 14.

щая в области D и имеющая с F одну общую точку w_0. При этом определении может быть доказана теорема: множество точек, принадлежащих границе F и не достижимых конечными путями, переходит всегда во множество точек меры нуль на окружности.

4. На ряду с работами, ставящими себе целью выяснить характер соответствия границ при конформном отображении областей возможно более общего вида, за последнее годы появилось много работ, направленных на выяснение условий, при которых производная (1-я, 2-я, ..., n-я) отображающей функции существует не только внутри области, но и на границе. Первые результаты в этом направлении были получены Келлогом (Kellog) еще давно, причем в основе исследований Келлога лежали методы теории потенциала; но эти работы в развитии теории функций комплексного переменного оставались до последнего времени мало замеченными. Следующая работа принадлежит Lichtenstein'у, в которой устанавливается лишь рост производной отображающей функции при условии, что границы областей имеют конечную кривизну. Чисто геометрически к этой проблеме подошел впервые М. А. Лаврентьев *, который затем в совместной работе с П. А. Бессоновым [21]) дал наиболее общие условия, которым должны удовлетворять границы областей для того, чтобы существовала граничная производная отображающей функции. Параллельно с работами советских математиков, в Германии Seidel и Warschawski, частично используя геометрические принципы, произвели глубокий анализ проблемы и дали наиболее общие критерии существования n-й производной. Отметим, что некоторые результаты упомянутых авторов были независимо получены в советской работе М. А. Лаврентьева и В. К. Гольцмана **. Последняя работа в этом направлении принадлежит В. И. Смирнову [22]), в которой автор, используя существенно новый метод, расширяет некоторые предложения, данные Seidel'ем.

5. При конформном отображении области D на круг углы между соответствующими направлениями не меняются. Если F, граница области D, состоит из конечного числа аналитических дуг, то указанное свойство имеет место также во всех точках границы, кроме конечного числа ее угловых точек. И. И. Привалов*** дополнил этот классический результат, исследовав случай, когда F есть спрямляемая линия Jordan'а. Прежде всего оказывается, что в этом случае могут быть построены примеры, когда консерватизм углов не имеет места на множестве точек всюду плотном и мощности континуума. Далее, доказывается следующая теорема: при конформном отображении двух областей, ограничен-

---

* Цит. под № 14.

[21]) Sur l'existence de la dérivée-limite, «Bul. de la Soc. math. de France», 1930.

** Цит. под № 5.

[22]) Uber die Rändezuordnung bei konformer Abbildung, «Math. Ann.», B. 107, H. 2, 1932.

*** Цит. под № 19.

ных спрямляемыми кривыми, консерватизм углов имеет место на их границах почти всюду.

Отправляясь от этих исследований, В. Н. Вениаминов* рассмотрел случай, когда любая односвязная область D конформно отображается на круг. В основе этой работы лежит следующее понятие: граница F области D допускает облицовку, если существует простая спрямляемая дуга Jordan'а L, принадлежащая D и такая, что множество точек F, принадлежащих L, есть множество положительной меры. При этом определении может быть доказана теорема: если граница области D допускает облицовку, то имеется консерватизм углов во всех точках w, принадлежащих множеству положительной меры.

Кроме того, показывается, что существует область D, ограниченная простой замкнутой линией Jordan'а и такая, что консерватизм углов не имеет места во множестве точек, отображением которого является почти вся окружность. Наконец, дается необходимое и достаточное условие, при котором имеет место консерватизм углов во множестве точек границы, переходящем в почти все точки окружности. Это условие заключается в следующем: каково бы ни было множество точек E положительной меры, лежащее на окружности $|z| = 1$, всегда существует множество точек E_1 положительной меры, содержащееся в E, и такое, что множество $\mathcal{E}_1$ точек, соответствующих (в силу конформного отображения) точкам множества E_1, имеет положительную меру.

§ 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

6. Пусть имеем в плоскости комплексного переменного z область D с границей F. Обозначим через E точечное множество, принадлежащее D (или F); общую проблему единственности аналитических функций можно формулировать следующим образом: найти условия, которым должно удовлетворять множество E, чтобы при соблюдении этих условий две любые аналитические функции, голоморфные в D и совпадающие на E, были между собой тождественны. Эта проблема, естественно, распадается на две части: случай, когда множество точек E находится внутри области D, и случай, когда E находится на границе. В этом последнем случае мы предполагаем, что, какова бы ни была точка z_0 множества E, каждая из рассматриваемых функций стремится к определенному пределу, когда z стремится к z_0, оставаясь в D.

Под значениями функций на E мы понимаем эти предельные значения функций. Первые решения этих проблем даются в классической теории аналитических функций: единственность имеет место, если E имеет хотя бы одну предельную точку в области D, а также в случае, когда E совпадает с F — границей односвязной области. При дальнейшем изучении аналитических функций

* Цит. под № 20.

и их приложений к анализу проблема единственности приобрела очень большое значение (аналитическое продолжение, теория дифференциальных уравнений), и за последнее время ей уделялось много внимания. Общие результаты в этом направлении были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым.

7. В том случае, когда множество точек E принадлежит границе области D, проблема единственности сводится к рассмотрению двух случаев: 1) при каких условиях аналитическая функция $f(z)$, голоморфная в области D, будучи равна 0 на E, будет тождественно равна нулю, и 2) при каких условиях аналитическая функция $f(z)$, голоморфная в D, будучи равна бесконечности на E, будет тождественно равна бесконечности.

Как было уже сказано, проблема единственности решается в положительном смысле, когда E совпадает с границей односвязной области D. К этому предложению приводится более общее: пусть область D ограничена простой замкнутой линией Jordan'а L. Обозначим через R множество точек, получившихся после выбрасывания из D счетного числа областей попарно без общих точек и по диаметру стремящихся к нулю. При этих условиях, если аналитическая функция $f(z)$, голоморфная в D, стремится к нулю, когда z стремится, оставаясь все время в R, к точкам некоторой дуги γ, лежащей на L, то $f(z) \equiv 0$ *.

Это предложение единственности теряет силу, если $f(z)$ стремится к бесконечности, как показывает пример, построенный Н. Н. Лузиным [23]).

Существует функция $f(z)$, голоморфная внутри круга $C: |z| < 1$ и такая, что если из круга C удалить счетное число частей плоскости (ограниченных полигонами, не имеющими попарно общих точек), по диаметру стремящихся к нулю, то когда z по оставшейся части круга C стремится к окружности $|z| = 1$, модуль $f(z)$ равномерно стремится к $+\infty$.

Благодаря исследованиям Pompeiu, Denjoy и В. В. Голубева [24]) был открыт класс аналитических функций, непрерывных с совершенным всюду разрывным множеством особых точек. Приведенные выше первые рассмотрения теоремы единственности, естественно, приводят к мысли исследовать эту теорему для случая таких функций. Результат получился отрицательный. Можно построить аналитическую функцию $f(z)$, обладающую следующими свойствами: 1) $f(z)$ однозначна и непрерывна при $|z| < 1$; 2) $f(z)$ голоморфна всюду при $|z| < 1$, кроме точек некоторого совершенного всюду разрывного множества; 3) $f(z)$ равномерно стремится к нулю, когда z стремится к точкам окружности $|z| = 1$.

---

* Цит. под № 19.

[23]) О существовании аналитических функций равномерно-бесконечных вблизи купюры, «Изв. Ив.-Возн. пол. ин-та» № 5, 1922; Lusin et Priwaloff, цит. под № 19.

[24]) Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, «Научн. зап. Моск. ун-та», 1917.

Все приведенные выше результаты относились к случаю, когда множество точек E содержало кусок границы. Теперь мы перейдем к общему случаю. Первые исследования в этом направлении для случая, когда D есть круг, принадлежат Fatou. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов* исследовали до конца этот вопрос, предполагая, что граница области D содержит дугу спрямляемой кривой Jordan'a. Свойствами, которыми можно характеризовать структуру множества точек E, лежащего на спрямляемой дуге, могут служить мощность, категория и мера.

С точки зрения мощности, проблема была решена отрицательно Fatou, который построил пример функции, голоморфной внутри круга, ограниченной и равной нулю на множестве точек мощности континуума, расположенном на окружности. С точки зрения категории, вопрос тоже был решен отрицательно: существует пример функции голоморфной внутри круга, ограниченной и равной нулю на множестве точек второй категории, лежащем на окружности). Если множество точек E имеет положительную меру, то единственность имеет место; это предложение в общем виде можно формулировать так: если функция $f(z)$, голоморфная с одной стороны от спрямляемой линии L, принимает определенные значения (конечные или бесконечные) по всем некасательным к L путям на множестве точек E, положительной меры, лежащим на L, то эти значения единственным образом определяют рассматриваемую функцию*.

В изложенной выше теории единственности аналитических функций существенно предполагалось, что функция $f(z)$ стремится к вполне определенным значениям, когда z стремится по всем некасательным к границе путям к точкам множества E. Рассматривая функции, голоморфные внутри круга, И. И. Привалов совместно с Н. Н. Лузиным исследовали проблему единственности, предполагая, что функция $f(z)$ стремится к определенным значениям, когда z стремится по радиусам к точкам множества E окружности*. Приведем основные результаты, добытые в этом направлении.

Прежде всего оказалось, что существует функция $f(z)$, голоморфная при $|z|<1$ и стремящаяся к нулю, когда z стремится по радиусам к точкам множества E окружности, $\text{mes } E=2\pi$.

С другой стороны, существует функция $f(z)$, голоморфная при $|z|<1$ и стремящаяся к нулю, когда z стремится по радиусам к точкам множества E окружности, причем E есть положительной меры и второй категории. Таким образом, в случае радиальных путей для единственности множество точек E должно удовлетворять более жестким условиям.

Теорема единственности здесь имеет место, если множество точек E есть приведенное и второй категории на некоторой дуге σ окружности $|z|=1$. В самом деле, доказывается следую-

---

* Цит. под № 19.

шая теорема: если функция $f(z)$, голоморфная в круге $|z|<1$, стремится к нулю (или бесконечности), когда z стремится по радиусам к точкам множества E, приведенного (в смысле меры) и второй категории на некоторой дуге σ окружности $|z|=1$, то $f(z)$ тождественно равна нулю (или бесконечности).

Дополнением этих результатов может служить пример, построенный Б. Б. Девисоном [25]). Автор строит пример функции, регулярной внутри круга $|z|<1$ и имеющей по некасательным путям предельные значения, равные нулю на наперед заданном множестве меры нуль.

8. Выше было указано, что единственность имеет место, если E имеет хотя бы одну предельную точку внутри области D. Таким образом вопрос, подлежащий освещению, сводится к следующему: внутри области D дано счетное множество E, имеющее все свои предельные точки на границе D; при каких условиях функция $f(z)$, голоморфная внутри области D и равная нулю на E, будет тождественно равна нулю? Первый результат в этом направлении, полученный Blaschke, является частным случаем следующего предложения [26]): пусть функция $f(z)$, голоморфная при $|z|<1$, имеет счетное множество E нулей z_k, $|z_k|<1$, таких, что ряд $\Sigma(1-|z_k|)$ расходится; если, кроме того, $f(z)$ удовлетворяет условию:

$$\int_0^{2\pi} \ln^{+}|f(\rho e^{\varphi i})|\, d\varphi = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < 1, \tag{1}$$

то $f(z)$ есть тождественный нуль.

Интересный результат в этом направлении, открытый В. В. Голубевым, заключается в следующем [27]): пусть функция $f(z)$, голоморфная при $|z|<1$, имеет счетное множество нулей z_k, $|z_k|<1$, таких, что ряд $\Sigma(1-|z_k|)^{1+s+\varepsilon}$ расходится; если, кроме того, $f(z)$ удовлетворяет условию:

$$|f(z)| < e^{\frac{K}{(1-|z|)^s}},$$

то $f(z)$ тождественно равна нулю.

К проблеме единственности относится также большая работа В. Л. Гончарова [28]); укажем лишь на главные результаты этого исследования.

Основная проблема, которой занимается автор, может быть формулирована следующим образом. Дана область D и некоторый

---

25) «Мат. сб.», 1932.

26) Priwaloff, Eine Erweiterung des Satzes von Herrn Vitali über Folgen analytischer Funktionen, «Math. Ann.».

27) «Исследования по теории особых точек однозначных функций», «Научн. зап. Сарат. ун-та», 1924.

28) «Sur la détermination des fonctions par les zéros...», «C. R.», 1927. «Sur la détermination des fonctions par les zéros...», «Сообщ. Х. М. О.», 1928.

класс аналитических функций $F=\{f(z)\}$, правильных в этой области.

Обозначим через $\mathcal{E}(f)$ множество нулей функции $f(z)$ в области D. Спрашивается, существуют ли две линейно независимые функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ такие, что

$$\mathcal{E}(f^{(n)})=\mathcal{E}(\varphi^{(n)})$$

для конечного или бесконечного множества индексов n. В ответ на этот вопрос автор дает теорему:

Если D есть вся плоскость, F — совокупность всех мероморфных функций конечного порядка и ограниченной множественности (для каждой функции семейства существует число K, такое, что все полюса и нули этой функции имеют порядок не выше K), то при этих условиях, если

$$\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}(\varphi) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(f')=\mathcal{E}(\varphi'),$$

то

$$\varphi=cf,$$

кроме случаев:

$$f=Ae^{\alpha P(x)},\ \varphi=Be^{\beta P(x)},$$

$$f=A\left[1+e^{P(x)}\right]^{m},\ \varphi=B\left[1+e^{-P(x)}\right]^{m}$$

где A, B, α, β — произвольные константы и m — целое число, $P(x)$ — полином.

Если отказаться от условия ограниченной множественности всех функций семейства, то теорема теряет силу. Автор показывает, что заключение теоремы остается в силе, если добавить условие:

$$\mathcal{E}(f'')=\mathcal{E}(\varphi''),$$

и если исключить три частных семейства функций:

$$f=Ae^{ax}, \qquad \varphi=Be^{bx};$$

$$f=A\left(1+e^{ax+b}\right),\ p=B\left(1+e^{-ax-b}\right);$$

$$f=A\frac{e^{P(x)}}{e^{P(x)}-1}, \quad \varphi=B\frac{1}{e^{P(x)}-1}.$$

§ 3. КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

9. Пусть дана последовательность аналитических функций

$$f_1(z),\ f_2(z),\ldots,f_n(z),\ldots, \tag{1}$$

голоморфных внутри области D. Weierstrass показал, что, если функции $f_n(z)$, непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$, образуют последовательность, равномерно сходящуюся на границе, то эта последовательность сходится равномерно во всей области $\overline{D}$ и определяет функцию, голоморфную внутри области. С другой стороны, Vitali показал, что, если последовательность (1) функций, голоморфных и равномерно ограниченных в своей совокупности в области D, сходится на счетном множестве точек E, имеющем предельную точку внутри D, то последовательность (1) сходится в каждой точке области D и притом равномерно во всякой области, внутренней к D. Теоремы Weierstrass'а и Vitali, имея многочисленные приложения, получили значительные расширения в разнообразных направлениях. Общую проблему, к которой относятся эти результаты, можно формулировать следующим образом: известно, что последовательность (1) сходится на некотором множестве точек E, принадлежащем области D или ее границе. При каких добавочных гипотезах можно утверждать, что последовательность (1) будет сходиться в каждой точке области D?

Эта проблема, тесно связанная с проблемой единственности, естественно распадается на две части: случай, когда множество точек E принадлежит границе, и случай, когда E находится внутри D.

Мы переходим к краткому изложению основных результатов, добытых в этих двух направлениях.

10. Первое существенное обобщение теоремы Weierstrass'а было получено Montel'ем: пусть область D ограничена простой замкнутой линией Jordan'а. Если функции последовательности (1), непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$, ограничены в своей совокупности, и если последовательность (1) сходится в каждой точке границы, то эта последовательность сходится в каждой точке области D и притом равномерно во всякой области, внутренней к D. Далее, Montel показал, что теорема остается справедливой, если вместо сходимости в каждой точке границы потребовать сходимость в каждой точке любой дуги границы.

Эти результаты Montel'я были существенно дополнены А. Я. Хинчиным [29]), который показал, что, если D ограничена спрямляемой кривой, то теорема остается в силе, если вместо сходимости на дуге потребовать сходимость на любом множестве точек меры, большей нуля. В случае спрямляемой границы и ограниченности функции внутри области нет надобности предполагать непрерывность этой функции в замкнутой области $\overline{D}$, так как по теореме Fatou, обобщенной В. В. Голубевым, значения такой функции на границе существуют почти во всех точках, понимая под значением в граничной точке предел, к которому стремится функция, когда z стремится к этой точке по любому некасательному к границе пути.

---

[29]) «О последовательностях аналитических функций», «Мат. сб.», т. 31, 1922.

Теорема А. Я. Хинчина была обобщена И. И. Приваловым [30]), который показал, что предложение остается в силе, если в условиях А. Я. Хинчина заменить требование: «функции последовательности (1) ограничены в своей совокупности», одним из следующих: «функции последовательности (1) равномерно выпускают континуум» или «функции последовательности (1) однолистны и последовательность (1) сходится в некоторой точке z_0, лежащей внутри D». К рассматриваемой проблеме относятся также результаты, полученные Г. М. Фихтенгольцем [31]). Последний находит условия, необходимые и достаточные для того, чтобы последовательность (1) функций, голоморфных в круге $|z|<1$, сходилась в этом круге к функции голоморфной, предполагая, что функции последовательности (1) удовлетворяют одной из двух гипотез:

(А) Каково бы ни было значение r, $r<1$, и $n=1, 2,\ldots$, имеем:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{\theta i})|\, H(|f(re^{\theta i})|)\, d\theta < N,$$

где $H(t)$ — положительная функция, неограниченно возрастающая вместе с t.

(В) Каково бы ни было значение r, $r<1$, и $n=1, 2,\ldots$, имеем:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{\theta i})|\, d\theta < N.$$

При этих гипотезах доказываются следующие предложения:

при гипотезе (А) для того, чтобы последовательность (1) сходилась к функции $f(z)$, голоморфной в круге $|z|<1$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$\Phi_n(\theta) = \int_0^{\theta} f_n(e^{\lambda i})\, d\lambda$$

сходилась на множестве положительной меры;

при гипотезе (В), для указанной сходимости необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\varphi_n(\lambda)$ сходилась по мере на

30) «Sur les suites des fonctions analytiques», «Мат. сб.», т. 33, 1926.

31) «Sur les suites des fonctions analytiques», «C. R.», t. 184, 1927, p. 1528.

некотором множестве меры, большей нуля, где $\psi_n(\lambda)$ — функция, входящая в обобщенный интеграл Пуассона:

$$f_n(re^{\theta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\lambda-\theta)}\, d\psi_n(\lambda).$$

11. В том случае, когда множество точек E находится внутри области D, первый результат о сходимости последовательности аналитических функций был получен Vitali и приведен выше. В силу этого результата при всех дальнейших рассуждениях естественно предполагается, что множество E есть счетное и имеет все свои предельные точки на границе области. Существенное обобщение теоремы Vitali было получено Blaschke.

Пусть функции последовательности (1), голоморфные в круге $|z|<1$, ограничены в своей совокупности. Тогда, если последовательность (1) сходится на счетном множестве точек $E(z_k)$, $|z_k|<1$, таких, что ряд $\Sigma(1-|z_k|)$ расходится, то последовательность (1) сходится равномерно во всяком круге $|z|\leqslant\rho$, $\rho<1$.

И. И. Привалов * обобщил эту теорему, показав, что она остается в силе, если вместо условия: «функции $f_n(z)$ $(n=1, 2,\ldots)$ ограничены в своей совокупности», потребовать, чтобы выполнялось одно из двух: a) существует число K, не зависящее от ρ и такое, что

$$\int_0^{2\pi} \ln^+|f_n(\rho e^{\theta i})|\,d\theta < K \quad (n=1,\ 2,\ldots),$$

b) последовательность функций (1) равномерно выпускает линейный континуум.

Далее, И. И. Привалов ** распространил эту теорему на тот случай, когда область D голоморфизма функций $f_n(z)$ есть любая область. Для формулировки этой теоремы обозначим через $g(x, z)$ функцию Green'a области D с логарифмическим полюсом в точке $x=z$, и пусть C_λ — линия уровня: $g(x, x_0)=\lambda$. Тогда это предложение может быть сформулировано так: если последовательность (1) сходится на счетном множестве точек z_k области D таких, что ряд $\Sigma g(x_0,\ z_k)$ расходится, и если, кроме того,

$$\int_{C_\lambda} \ln^+|f_n(\xi)|\,\frac{\partial g(\xi, x_0)}{\partial n}\,ds < M$$

при любом n и λ, то последовательность (1) сходится равномерно во всякой области, внутренней к D.

---

* Цит. под № 26.

** Цит. под № 30,

Значительный интерес представляет теорема, открытая В. В. Голубевым *: пусть последовательность (1) функций, голоморфных в круге $|z|<1$, сходится на счетном множестве точек $E(z_k)$, $|z_k|<1$, таких, что ряд $\Sigma(1-|z_k|)^{1+s+\varepsilon}$ расходится, и удовлетворяет условию:

$$|f_n(z)|<e^{\frac{K}{(1-|z|)^s}},$$

где K — постоянное, не зависящее от n. При этих условиях эта последовательность сходится равномерно при $|z|\leqslant\rho$, $\rho<1$.

12. Пусть дана последовательность аналитических функций

$$f_1(z),\ f_2(z),\ldots,f_n(z),\ldots, \tag{1}$$

голоморфных при $|z|\leqslant 1$, и пусть эта последовательность сходится в каждой точке круга $|z|\leqslant 1$. Osgood показал, что при этих условиях множество E точек неравномерной сходимости последовательности (1) есть континуум (множество совершенное и нигде не плотное).

М. А. Лаврентьев [32]) дополнил предложение Osgood'a, выяснив до конца структуру множества точек неравномерной сходимости последовательности (1). В основу своих исчислений М. А. Лаврентьев положил следующее определение:

Множество E, замкнутое и ограниченное, называется M-множеством, если, каково бы ни было замкнутое множество E_1, содержащееся в E, всегда найдется такая порция E_2 множества E_1, что, во-первых, E_2 есть граница связной области D, содержащей точку ∞, во-вторых, всякая точка множества E принадлежит либо области D, либо множеству E_2.

Пользуясь этим определением, доказывается следующая теорема: для того чтобы некоторый континуум E можно было рассматривать как множество точек неравномерной сходимости последовательности (1), необходимо и достаточно, чтобы множество E было M-множеством.

Параллельно с М. А. Лаврентьевым эти же результаты были получены A. Rosenthal'ем и Hartogs'ом.

В своей другой заметке [33]) М. А. Лаврентьев занимается изучением структуры предельной функции. Автор доказал, что, если континуум E не разбивает плоскости, то действительная и мнимая части предельной функции на этом континууме суть произвольные функции первого класса. Независимо Rosenthal и Hartogs доказали эту теорему для случая, когда мера E равна нулю. Отмеченный результат М. А. Лаврентьева, дополненный ранее про-

* Цит. под № 27.

[32]) «Sur un problème de M. Montel», «C. R.», t. 184, 1927.

[33]) «C. R.», 1928.

веденным исследованием (Rosenthal'ем, Hartogs'ом и Лаврентьевым), позволил автору найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество E, чтобы: 1) действительная и мнимая части предельной функции на E были бы произвольными функциями первого класса в смысле Baire'a, 2) в счетном числе смежных областей предельная функция совпадала со счетным числом произвольных, голоморфных в этих областях, функций.

Заметим, кстати, что общая проблема, поставленная Montel'ем, о том, какова структура предельной функции $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, остается до сих пор нерешенной.

§ 4. ИНТЕГРАЛ CAUCHY

13. Пусть $f(z)$ аналитическая функция, голоморфная внутри односвязной области D, ограниченной кривой C. Если кривая C аналитическая и функция $f(z)$ голоморфна также на C, то имеет место классическая формула Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(x)}{x-z}\,dx, \tag{1}$$

определяющая значения функции $f(z)$ внутри области D по ее значениям на границе. Эта формула (1) является основной во всей теории аналитических функций; отсюда естественно было искать возможно более широких условий, при которых эта формула имеет место. Эти условия двоякого рода: одни касаются контура интеграции C, другие относятся к классу рассматриваемых функций. Fatou, воспользовавшись понятием интеграла Lebesgue'a, показал, что формула (1) имеет место, если $f(z)$ ограничена внутри аналитического контура C.

В. В. Голубев* распространил результат Fatou на случай, когда C—любая спрямляемая кривая. В условиях Fatou и В. В. Голубева под значениями $f(z)$ на границе понимаются те значения, к которым стремится $f(z)$, когда z стремится к точкам границы по всем некасательным к границе путям; в силу известного предложения Fatou, обобщенного В. В. Голубевым, если $f(z)$ ограничена внутри области, то она принимает на спрямляемой границе почти всюду вполне определенные значения.

Полное решение вопроса было дано И. И. Приваловым [34]). Предполагая, что функция $f(z)$, голоморфная внутри спрямляемого контура C, принимает по всем некасательным к границе путям почти всюду на C значения некоторой функции $f(x)$, интегри-

---

* Цит. под № 24.

[34]) Priwaloff, Sur certaines propriétés métriques..., «Journ. de l'Ecole Polyt.», 1925 и цит. под № 19.

руемой по Lebesgue'у, даются необходимые и достаточные условия для граничной функции $f(x)$, чтобы имела место формула (1).

В связи с решением этой задачи И. И. Привалов прежде всего исследует самый аналитический аппарат, входящий в формулу Cauchy. В основу этого исследования положены два следующие понятия:

a) Интегралом типа Cauchy называется выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z}, \tag{2}$$

где L — некоторая спрямляемая линия, а $f(x)$ — a priori заданная на L функция, интегрируемая по Lebesgue'у.

b) Пусть имеем интеграл типа Cauchy (2), и пусть x_0 есть какая-нибудь точка линии L, определяемая значением s_0 ее дуги. Обозначим через $\overline{L}$ часть линии L, оставшуюся после удаления из L маленькой дуги, концами которой служат точки $x(s_0-\varepsilon)$, $x(s_0+\varepsilon)$. *Особым интегралом* называется предел, если он существует, выражения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{L}} \frac{f(x)\,dx}{x-x_0}$$

при ε, стремящемся к нулю. Полагаем, по определению:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{L}} \frac{f(x)\,dx}{x-x_0}. \tag{3}$$

При этих обозначениях устанавливается следующая формула:

$$\lim_{z\to x}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_0} \pm \frac{1}{2}f(x_0), \tag{4}$$

которая имеет место почти всюду на L при стремлении z к точке x_0 по любому некасательному к L пути (знак $+$ для случая, когда z слева от положительного направления L, знак $-$ в противном случае).

Это предложение дает возможность решить вопрос, поставленный выше: необходимые и достаточные условия для того, чтобы формула (1) имела место, заключаются в равенстве:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(x)\,dx}{x-x_0} = \frac{1}{2}f(x_0), \tag{A}$$

которое должно быть выполнено почти всюду на C.

Условия (A) можно заменить им эквивалентными, но более удобными для приложений. Такими условиями будут:

$$\int_C f(x)x^n\,dx=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{B}$$

Формула (4) также позволяет установить необходимые и достаточные условия приложимости формулы Pompeiu:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(x)\,dx}{x-z}+F(z), \tag{5}$$

где $f(z)$ — функция, голоморфная вблизи особой линии L, принимающая на L (с той и другой ее стороны) суммируемые значения $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $\varphi(x)=f_1(x)-f_2(x)$, а $F(z)$ — функция, голоморфная на L. Pompeiu показал, что формула (5) имеет место, если $f(z)$ ограничена вблизи L. Условия, данные И. И. Приваловым, заключаются в следующем: если обозначить через C описанный около L спрямляемый замкнутый контур при любом n, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$, то должно выполняться равенство:

$$\int_L \varphi(x)x^n\,dx=\int_C f(z)z^n\,dz.$$

В общем случае предельные значения интеграла типа Cauchy, определяемые по формуле (4), образуют на L функцию неинтегрируемую. В случае если $f(x)$ на контуре C удовлетворяет условию:

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K\,|x_1-x_2|^\alpha,$$

то интеграл типа Cauchy равномерно принимает на C значения $g(x)$, удовлетворяющие условию Lipschitz'a с тем же показателем α, если $\alpha<1$, и с показателем, сколь угодно близким к единице, если $\alpha=1$.

Затронутые выше вопросы за последние пять лет получили значительное развитие благодаря работам ленинградских математиков Г. М. Фихтенгольца и, главным образом, В. И. Смирнова.

В основе исследований лежит следующее определение: функция $\omega(z)$, правильная в круге $|z|<1$, принадлежит классу H_δ, $\delta>0$, если интегралы

$$\int_0^{2\pi} |\omega(re^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda, \qquad 0<r<1,$$

возрастающие с r, остаются ограниченными при $r\to 1$. Функция $\omega(z)$, принадлежащая классу H_δ, принимает почти всюду на окружности по всем некасательным путям вполне определенную последовательность значений. Г. И. Фихтенгольц показал, что для представимости функции, правильной в единичном круге, при помощи интеграла Cauchy необходимо и достаточно, чтобы эта функция принадлежала классу H_1.

В. И. Смирнов показал, что любая функция класса H_δ представима в следующей параметрической форме:

$$\omega(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda), \tag{1}$$

где $b(z)$ есть функция Blaschke

$$b(z) = \prod |\alpha_n| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_n}}{1 - \alpha_n z},$$

α_n — нули $\omega(z)$, $p(\lambda)$ не отрицательна, почти всюду равна значениям $\omega(e^{i\lambda})$, функции $\ln p(\lambda)$ и $[p(\lambda)]^\delta$ суммируемы и $q(\lambda)$ — ограниченная невозрастающая функция с производной, равной нулю почти всюду; второй интеграл [где фигурирует $dq(\lambda)$] есть интеграл Stieltjes'a, $\exp z = e^z$. Обратно, если функции p, q, b обладают перечисленными выше свойствами, то выражение (1) дает функцию класса H_δ.

При одной и той же функции $p(\lambda)$ существует бесчисленное множество функций класса H_δ, предельные значения которых на $|z| = 1$ равны $p(\lambda)$ почти всюду. Среди этих функций выделяется одна:

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda,$$

которая внутри круга имеет *максимальный модуль*.

Для дальнейших исследований вводятся следующие дополнительные определения. Функция $\omega(z)$ принадлежит *классу A*, если она представима в форме:

$$\omega(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda), \tag{1}$$

где $q_1(\lambda)$ есть действительная и суммируемая функция, а $q(\lambda)$ есть функция с ограниченным изменением, с производной, равной нулю почти всюду. Для принадлежности классу A необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \ln |\omega r(e^{i\lambda})| d\lambda, \qquad 0 < r < 1, \tag{2}$$

оставались ограниченными.

Важный для применений подкласс класса A, составляют функции класса D, которые изображаются формулой (1) при условии, что $q(\lambda)$ есть функция невозрастающая. Эти определения дают возможность дать новый критерий принадлежности функции $\omega(z)$ к классу H_δ и, в частности, к классу функций, изображенных интегралом Cauchy. Класс H_δ совпадает с совокупностью функций класса D, для которых предельные значения $\omega(e^{i\lambda})$ суммируемы.

Предыдущие результаты относились к функциям, заданным в круге; в последней своей работе В. И. Смирнов распространяет эти результаты на случай произвольной односвязной области D (однолистной или нет), ограниченной спрямляемой кривой Жордана.

Если Γ_r есть кривая, в которую переходит окружность $|z| = r$ при конформном отображении круга $|z| < 1$ на данную область D, то для представимости функции $f(x)$ интегралом Cauchy, взятым по Γ_1, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{\Gamma_1} |f(x)|\,dx$ оставался ограниченным при $r \to 1$.

Весьма важное применение получает общая параметрическая форма представления функций к функциям, реализующим конформное отображение круга на область со спрямляемой границей. Пусть $\psi(z)$ функция, реализующая указанное отображение; имеем:

$$\psi'(z) = b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln p(\lambda) \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, d\lambda \, \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, dq(\lambda). \qquad (3)$$

Автор показывает, что в довольно широком классе случаев интеграл Stiltjes'а пропадает, и если еще допустить, что область D не содержит точек ветвления, то формула (3) приобретает особо простой вид:

$$\psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln p(\lambda) \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, d\lambda.$$

Пользуясь этой формулой, автор, обобщая понятие класса H_δ на случай функций, расположенных в любой области со спрямляемой границей, дает для всех функций этого класса параметрическое представление, аналогичное (1).

Во второй части работы автор связывает вопросы параметрического представления голоморфной функции и возможность ее разложения по ортогональным функциям.

Пусть дана счетная последовательность полиномов*, таких что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} p(\lambda)\, q_n(e^{i\lambda})\, \overline{q}_m(e^{i\lambda})\, d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

где $p(\lambda)$ и $\ln p(\lambda)$ — суммируемы.

---

* Теория этих полиномов была впервые изучена Szegö.

При этих условиях совокупность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k q_k(z),$$

для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

сходится, есть совокупность сходящихся рядов Фурье для функций $F(z)$ таких, что

$$D(z) \cdot F(z)$$

принадлежат классу H_2, где

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{p(\lambda)} \, \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \, d\lambda. \tag{4}$$

Отметим еще один результат: если $D(z)$ имеет форму (4), $p(\lambda)$ и $\ln p(\lambda)$ суммируемы, то при любом m существует последовательность полиномов Q_n таких, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \left| (e^{i\lambda})^n - D(e^{i\lambda}) \, Q_n(e^{i\lambda}) \right|^2 = 0.$$

Дальше, пользуясь формулой (3), автор распространяет отмеченные результаты на случай областей, ограниченных спрямляемыми кривыми.

§ 5. ПОВЕДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ОСОБОЙ ЛИНИИ

14. Пусть функция $f(z)$ голоморфна вблизи спрямляемой линии L с одной ее стороны. Спрашивается, при каких условиях $f(z)$ принимает по всем некасательным путям почти всюду на L определенные конечные значения. Первое решение этой задачи дал Fatou, показав, что, если, L есть аналитическая дуга и $f(z)$ ограничена, то $f(z)$ стремится почти всюду на L по всем некасательным путям к вполне определенным значениям.

Как показал В. В. Голубев *, теорема остается в силе в случае, когда L есть спрямляемая линия.

И. И. Привалов ** обнаружил, что это предложение имеет место в случае, когда $f(z)$ выпускает линейный континуум. Далее,

* Цит. под № 24.
** Цит. под № 19.

И. И. Приваловым были даны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $f(z)$, голоморфная с одной стороны от спрямляемой линии L, почти всюду на L (или на множестве точек E, $\operatorname{mes} E > 0$) принимала определенные конечные значения по всем некасательным к L путям. Наконец, приведем здесь предложение, тесно связанное с поставленным вопросом: если действительная часть функции $f(z)$, голоморфной с одной стороны от спрямляемой линии L, стремится к конечному пределу по всем некасательным к L путям на множестве точек E, $\operatorname{mes} E > 0$, лежащем на L, то $f(z)$ стремится по всем некасательным путям к конечному пределу почти всюду на E.

15. Естественно, что при рассмотрении аналогичного вопроса для производной $f'(z)$ условия получаются более жесткие. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $f'(z)$ стремилась к определенному конечному пределу на множестве точек E, $\operatorname{mes} E > 0$, лежащем на L, по всем некасательным к L путям, были получены В. Н. Вениаминовым [35]).

Глубокий результат, относящийся к этому кругу проблем, был получен Н. Н. Лузиным [36]). Пусть на окружности $|z| = 1$ задана функция действительного переменного $f(\theta)$ с интегрируемым квадратом

$$\int_0^{2\pi} f^2(\theta)\, d\theta < \infty.$$

Обозначим через $F(z)$ аналитическую функцию комплексного переменного z:

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + (a_1 - ib_1)\, z + \ldots + (a_n - ib_n)\, z^n + \ldots,$$

где a_n и b_n суть коэфициенты Фурье для функции $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

При этих обозначениях автор доказывает следующую теорему: Почти для каждой точки $e^{i\theta}$ окружности $|z| = 1$ можно провести в круге $|z| \leqslant 1$ простую замкнутую линию Γ, касательную к окружности $|z| = 1$ в точке $e^{i\theta}$ и такую, что интеграл

$$\iint_\Gamma |F'(z)|^2\, d\sigma,$$

35) «Sur la dérivée-limite d'une fonction analytique», «C. R.», 1925. «Sur quelques propriétés de la dérivée-limite», там же.

36) «Sur une propriété des fonctions à carré sommable,» «Bull. of the Calcutta Math. Soc.», 1930.

распространенный на площадь, ограниченную Γ, имеет конечное значение. Множество исключительных точек есть множество меры нуль. Вместе с тем имеются случаи, когда исключительные точки существуют при непрерывной функции $f(\theta)$.

Двойной интеграл имеет простую геометрическую интерпретацию в виде площади куска римановой поверхности функции $F(z)$.

§ 6. ОДНОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С СОВЕРШЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

16. Теория диференциальных уравнений привела к необходимости изучения свойств однозначных аналитических функций с совершенным всюду разрывным множеством особых точек. Вследствие трудности проблем, сюда относящихся, до настоящего времени нет систематической теории такого рода функций. Однако и в этом направлении сделаны большие успехи благодаря работам как иностранных, так и советских авторов. Основные результаты, освещающие общие свойства однозначных аналитических функций с совершенным множеством особых точек, принадлежат Painlevé, Zoretti, Pompeiu, Denjoy, а из советских математиков В. В. Голубеву и В. С. Федорову. После того как, пользуясь интегралом типа Cauchy, Denjoy построил пример однозначной непрерывной аналитической функции с совершенным всюду разрывным множеством особых точек положительной площади, естественно возник вопрос о том, существуют ли такого рода функции с совершенным всюду разрывным множеством особых точек площади нуль. Впервые пример такого рода функции был дан В. В. Голубевым *.

В. С. Федорову принадлежит цикл исследований, вскрывающих ряд общих свойств однозначных аналитических функций с совершенным множеством особых точек произвольного вида. Так, в первой своей статье «Непрерывность и моногенность» [37]) В. С. Федоров установил следующее фундаментальное свойство единственности:

Однозначная функция, голоморфная вблизи особого множества и равномерно непрерывная вблизи его, единственным образом определяется своими предельными значениями на всякой порции особого множества.

Эта теорема была в более общем виде и иным, геометрическим, методом получена им в другой его работе [38]): «Sur la continuité des fonctions analytiques», где показывается, что такая функция с точностью до придаточного произвольного мнимого постоянного вполне определяется предельными значениями своей действительной части на всякой порции особого множества.

В дальнейшем исследования В. С. Федорова были направлены на изучение тех условий, при наличности которых однозначная

---

* Цит. под № 24.

[37]) «Изв. Ив.-Возн. пол. ин-та», № 1.

[38]) «Мат. сб.», т. 32, 1924.

аналитическая функция с совершенным множеством особых точке может быть представлена тем или иным аналитическим аппаратом. В первую очередь, им был выделен класс функций, изображаемых с помощью интегралов Denjoy-Lebesgue'a, распространенных на особое множество, и было выяснено, что этот класс не содержит всех непрерывных функций [39]). После этого совершенно естественно было изучить аналитический аппарат — ряд по интегралам Denjoy-Lebesgue'a. И в этом направлении В. С. Федоровым получены также интересные результаты.

§ 7. ФУНКЦИИ, ГОЛОМОРФНЫЕ ВНУТРИ КРУГА

В то время как теория функций, голоморфных вблизи совершенного множества особых точек произвольного вида, находится лишь в начале своего развития, иначе обстоит дело в том случае, когда это множество есть линия, в частности, окружность.

Классические результаты, добытые в теории целых функций с точки зрения изучения особых точек, можно распределить на следующие группы:

1. Изучение характера особенности по аналитическому выражению функции.
2. Изучение частоты значений независимого переменного, при которых функция принимает равные значения.
3. Теорема Picard'a и ее различные обобщения.

Теория целых функций, если ее рассматривать с точки зрения изучения особых точек, есть теория изолированной особой точки. Основные классы автоморфных функций являются простейшими примерами функций, особые точки которых образуют или окружность, или прямую. В связи с этим за последние 15 лет получили чрезвычайно широкое распространение проблемы изучения функций, особые точки которых образуют окружность. Здесь получен ряд результатов фундаментального значения, в которых распространяются на класс этих функций три группы отмеченных выше результатов теории целых функций.

Этим исследованиям в СССР посвящена, в основном, большая и важная работа В. В. Голубева *.

В. В. Голубев вводит, прежде всего, следующую классификацию особого множества. Пусть дана однозначная аналитическая функция $f(z)$, имеющая множество особых точек E, пусть d есть расстояние от z до E. Рост функции $f(z)$ в окрестности E может быть следующих типов:

1. $|f(z)| < \frac{1}{d^k}$, где k — константа. В этом случае E называется полярным особым множеством функции.

---

[39]) «Об изображении аналитических функций при помощи интегралов Лебега, распространенных на особое множество», «Изв. Ив.-Возн. пол. ин-та», № 6, 8, «Мат. сб.» т. 38, в. 4.

* Цит. под № 27.

2. $|f(z)| < e^{d^{\frac{1}{k}}}$; в этом случае E называется существенно особым множеством конечного порядка; если это условие не выполнено, то E называется существенно особым множеством бесконечного порядка для $f(z)$.

Изучение функций с полярным множеством особых точек было проведено ранее. В настоящей работе автор останавливается, главным образом, на существенно особом множестве конечного порядка.

В первой главе строится, по аналогии с целыми функциями, теория канонических произведений, устанавливаются признаки сходимости этих произведений. Используя этот аппарат, автор, с одной стороны, дает ряд оценок роста функции в зависимости от частоты нулей, с другой стороны, находит зависимость между ростом и показателем сходимости соответствующего канонического произведения. Укажем в виде примера на два результата этой главы:

I. Если $f(z)$ имеет особым множеством окружность, то можно найти бесчисленное множество окружностей, концентрических с особой линией, отстоящих от нее на расстоянии d, на которых

$$|f(z)| > e^{-d^{-(\rho+\eta)}},$$

где ρ есть показатель сходимости расстояний нулей $f(z)$ от особой линии η, $(\eta > 0)$, — любое постоянное положительное число и d как угодно мало.

II. Каноническое произведение, имеющее показатель сходимости $\rho\left(\frac{1}{d}\right)$, имеет порядок роста вида $\rho\left(\frac{1}{d}\right)^{1+\delta}$, $\delta > 0$.

Во второй главе исследуется множество нулей аналитической функции в окрестности множества особых точек; часть результатов этой главы мы отмечали при реферировании работ по проблеме единственности.

В третьей главе В. В. Голубев занимается изучением теоремы Picard'a для функции с совершенным множеством особых точек. Сначала автор обобщает известную теорему, ограничивающую рост функции, если функция выпускает два значения. После этого автор переходит к более общей задаче изучения множества предельных значений функции, когда аргумент стремится к особым точкам функции. Здесь В. В. Голубев получает новые условия, при соблюдении которых функция на множестве ее особых точек примет почти всюду определенные значения.

Последняя глава посвящена приложению общих результатов к некоторым автоморфным функциям.

К вопросу изучения функции по ее аналитическому выражению относится сильно разросшаяся за последние годы теория лакунарных рядов. Сюда относится ряд работ Hadamard'a, Mandelbrot'a

В СССР интересные результаты были получены В. В. Голубевым в его работе «К теории лакунарных рядов», доложенной на Всесоюзном математическом съезде [40]). В этой работе автор изучает функции, заданные лакунарным рядом:

$$F(z) = \sum e^{2^{n\alpha}} z^{2n} \quad (\alpha < 1).$$

В. В. Голубев обнаруживает следующие свойства этих функций:

1) Есть бесчисленное множество окружностей $|z| = r_n \left(\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 1\right)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(r_n)}{m(r_n)} = 1.$$

2) Функция $\varphi(z) = \frac{1}{F(z)}$ на бесчисленном множестве окружностей сколь угодно мало отличается от 0, т. е. $\varphi(z)$ принадлежит к классу функций, указанных W. Gross'ом («Math. Zeitschrift», B. III, S. 62).

3) Функция $\varphi(z)$, как все функции класа W. Gross'a, может быть представлена рядом рациональных дробей (разложение типа Cauchy).

4) Если назвать через σ показатель роста функции и через ρ показатель сходимости ряда нулей, то

$$\rho = 1 + \sigma + \varepsilon.$$

В. И. Смирнов в работе «Sur les équations différentieles linéaires du second ordre et les fonctions automorphes» [41]) провел широкое исследование автоморфных функций в связи с линейными диференциальными уравнениями второго порядка.

Остановимся на работе И. И. Привалова [42]) «По поводу предложения Bloch'a». E. Bloch впервые распространил на функции голоморфные в круге $|z| < 1$ известное предложение Koebe («константа Koebe»), относящееся к однолистным функциям. Bloch показал, что если функция

$$w = f(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots$$

правильна в единичном круге, то существует круг абсолютного радиуса, покрываемый множеством значений функции.

Landau, используя теорему Bloch'a, дал наиболее простое доказательство большой теоремы Picard'a, доказательство, вскрывающее простую геометрическую природу этой теоремы. В указанной

---

40) «Бюллетень Всес. мат. съезда», 1930.

41) Bull. des Sc mat. t 45, 1921.

42) «Мат. сб.», т. 35 : 1, 1928.

работе И. И. Привалов расширяет предложение Bloch'а в различных направлениях.

Теорема Bloch'а, например, остается в силе, если мы примем равным единице вместо первого n-й коэфициент тэйлоровского разложения функции $f(z)$. И. И. Привалов также находит условие, когда круг абсолютного радиуса покрывается p раз. В заключение автор дает приложение добытых результатов к оценкам функций, выпускающих в круге два значения. В другой своей работе И. И. Привалов показывает, что теорема Bloch'а остается в силе, если вместо круга рассмотреть покрытие кольца $r < |z| < R$. Результаты получены методом нормальных семейств и в соответствии с этим устанавливается лишь существование констант.

В связи с этим интересно отметить некоторые результаты, полученные А. Ф. Бермантом. А. Ф. Берманту удается для некоторых классов функций, более общих, чем однолистные, установить точные значения констант типа констант Koebe-Bloch'а.

Эти исследования тесным образом связаны с работами по разысканию абсолютных констант в теории однолистных функций, отмеченными нами в начале обзора.

В работе [43]), доложенной на Всесоюзном математическом съезде, «Об областях, образованных из точек, изображающих общие значения пары аналитических функций», И. И. Привалов распространяет теорему Bloch'а на пары функций.

§ 8. ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

С точки зрения аналитической, после полиномов простейшим классом аналитических функций являются функции целые.

Многочисленные исследования этих функций вскрыли ряд замечательных свойств целых функций.

Введенные в рассмотрение отдельные классы целых функций по своим свойствам оказались чрезвычайно близкими к полиномам— ряд теорем алгебры удалось перенести на эти классы целых функций. Изучение целых функций, важное само по себе, приобретает исключительную ценность благодаря тесной связи, существующей между этими функциями и проблемами аналитической теории чисел. Изучением целых функций в Союзе стали заниматься систематически лишь в последние годы.

Этим вопросам посвящен ряд очень ценных работ А. О. Гельфонда и В. Л. Гончарова.

Остановимся на работах А. О. Гельфонда.

В работе «Sur une application du calcul des différences finies à l'étude des fonctions entières» [44]) автор существенно расширяет следующую теорему Polya: если целая функция $g(z)$ в точках 0, 1, 2,.. принимает целые значения и если, кроме того, $|g(z)| < Ae^{\alpha|z|}$, то $g(z)$ есть полином. А. О. Гельфонд заменяет условие Polya, что функ-

[43]). «Мат. сб.», т. 37, 1930.

[44]) «Мат. сб.», 1929.

ция в точках 0, 1, 2,... принимает целые значения условием, что в этих точках значения функции приближаются к целым числам. Для такого класса «асимптотически целочисленных» функций автор устанавливает ряд теорем, аналогичных теореме Polya. Пусть ω_n есть разность между $g(n)$ и ближайшим целым числом; если теперь *приближением* назвать величину:

$$u = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{\omega_n}}, \quad u > 1,$$

то оказывается, что для каждого приближения u существует такой граничный рост целой функции, что функция, растущая медленнее и имеющая данное приближение u, должна быть многочленом. Приведем формулировки некоторых теорем.

Если целая функция $g(z)$ удовлетворяет двум условиям:

$$|g(re^{i\varphi})| \leqslant Ae^{\alpha r}, \ \alpha < \ln u, \ A > 0$$

$$\lim |\omega_n u^n| \leqslant L,$$

то $g(z)$ есть полином.

Если целая функция $g(z)$ удовлетворяет условиям:

$$|g(re^{i\varphi})| \leqslant Ae^{\alpha r}, \ \alpha < \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right),$$

где y есть действительный и положительный корень уравнения:

$$\frac{u}{4} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\ln(y + y^2)},$$

$$\lim |\omega_n u^n| \leqslant 1, \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots; \ u > 1,$$

то $g(z)$ есть полином.

В более позднее время А. О. Гельфондом была доказана также такая теорема: если целая функция $f(z)$ нулевого порядка принимает в точках $\beta, \beta^2, \ldots, \beta^n, \ldots$ целые значения и если:

$$|f(z)| < Ae^{\alpha \ln^2 |z|},$$

где α зависит только от β, то $f(z)$ есть полином.

К тому же кругу идей относится другая работа А. О. Гельфонда «Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières», в которой автор обобщает одну теорему, данную Fukazawa.

В своих исследованиях А. О. Гельфонд пользуется преимущественно методом конечных разностей, развитию которых посвящена работа: «Sur la developpabilité des fonctions entières en serie d'interpolation de Newton».

Наиболее блестящим завершением этого цикла работ является работа А. О. Гельфонда «Sur les nombres transcendents» [43]), в которой автор, используя развитый им метод, доказывает трансцендентность чисел $e^{\pi}, \omega^{i\sqrt{p}}$, где ω — алгебраическое число, а p — целое.

Из работ В. Л. Гончарова, которые относятся к несколько другому направлению в изучении целых функций, особо отметим работу «О разложении целых функций в обобщенный ряд Абеля».

В дальнейших своих работах, доложенных на научных конференциях Института математики и механики, А. О. Гельфонд продолжает заниматься теоретико-числовыми исследованиями в теории целых функций. В работе «Условия разложимости функции в обобщенный ряд Ньютона» устанавливается связь роста функции с плотностью точек интерполяции.

В работе «Трансцендентность периодов целочисленности целых функций конечного порядка» автор доказывает трансцендентность периодов целочисленности целых функций конечного порядка. (Целочисленной в смысле Hurwitz'a функцией называется функция вида: $\sum \frac{a_n}{n} z^n$, где a_n — целые числа. Период целочисленности есть число, отприбавления которого к аргументу разложение функции в начале остается целочисленным). Эта теорема обобщается также, когда a_n — алгебраические.

В. Л. ГОНЧАРОВ.

(УССР)

Исследования, относящиеся к области теории аналитических функций и производившиеся на Украине — в Харькове (академик С. Н. Бернштейн, В. Л. Гончаров, Я. Л. Геронимус, В. Ф. Бржечка и Б. А. Рымаренко) и в Киеве (Н. И. Ахиезер) — сгруппированы около основной проблемы — наилучшего приближения функций посредством полиномов. Еще Чебышевым была поставлена задача: найти полином (целую рациональную функцию) $P_n(x)$ степени n, который в данном промежутке (a, b) возможно менее уклонялся бы от данной функции $f(x)$, непрерывной в этом промежутке; при этом имеется в виду равномерное приближение, так что, другими словами, требуется, чтобы модуль-максимум разности между искомым полиномом и данной функцией

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n(x) - f(x)| \tag{1}$$

принимал наименьшее значение. Как известно (теорема Вейерштрасса), какова бы ни была функция $f(x)$, непрерывная в ко-

[43]) C. R. 1930.