Le passage de la moyenne N à la fonction n se fait évidemment dans les mêmes conditions que lorsqu'il s'agit des fonctions habituelles relatives à une couronne, mais il n'est plus utile d'avoir une approximation aussi serrée, vu l'indétermination du second membre des inégalités telles que (2). On peut introduire dans tous les cas une majorante $W(X)$ de $T(e^X)$, construite toujours de la même façon, à dérivée (à droite ou à gauche) non décroissante et telle que $W'(X') \leqq 2W(X)$ si $W(X') = 2W(X)$; n est borné par $kW'(\log r)$ et, dans les directions de Borel, $n/W'(\log r)$ ne peut tendre vers zéro que pour deux valeurs au plus. Il est enfin manifeste, que dans les directions de caractère moyen nul, on pourra comparer N à T^{β}, $\beta < 1$, ..., tant que les fonctions introduites croissent plus vite que $(\log r)^2$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une classe de représentations continues.* Note de M. **M. Lavrentieff**, présentée par M. Hadamard.

Dans cette Note je me propose d'indiquer quelques propriétés d'une classe de représentations continues des domaines plans.

1. *Définition.* — Nous dirons qu'une fonction $w = f(z)$ de la variable complexe z est *presque analytique* dans un domaine $\mathcal{D}$ si cette fonction jouit des propriétés suivantes :

1° La fonction $f(z)$ est définie, uniforme et continue dans le domaine $\mathcal{D}$ du plan z.

2° Exception faite d'un ensemble dénombrable et fermé de points z_0, la fonction $w = f(z)$ réalise une correspondance homéomorphe entre les voisinages, suffisamment petits, des points z_0 et $w_0 = f(z_0)$; si dans le même voisinage de z_0, z décrit une circonférence dans le sens positif, le point $w = f(z)$ décrit une courbe simple fermée dans le sens positif.

3° Il existe deux fonctions réelles $p(z) \geqq 1$ et $\theta(z)$ de la variable z telles que : a, $p(z)$ est continue dans $\mathcal{D}$, $\theta(z)$ est continue en chaque point z de $\mathcal{D}$ où $p(z) \neq 1$. b, construisons dans le plan z l'ellipse $\mathcal{E}$: z est le centre de $\mathcal{E}$, l'angle entre le grand axe de $\mathcal{E}$ et l'axe réel est égal à $\theta(z)$, a et b étant les axes de $\mathcal{E}$, nous avons $1 < a : b = p(z)$. Cela posé, nous avons

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{f(z_2) - f(z_0)} \right| = 1,$$

où z_1 et z_2 sont des points de $\mathcal{E}$ pour lesquels l'expression $|f(z) - f(z_0)|$ atteint respectivement son maximum et son minimum.

Les fonctions $p(z)$ et $\theta(z)$ seront appelées *fonctions caractéristiques* de la fonction presque analytique $f(z)$.

Si nous supposons que la fonction caractéristique $p(z)$ est bornée, nous obtenons une classe de fonctions analogue à une classe de fonctions considérée par M. Grötzsch [1].

2. *Propositions préliminaires.* — Indiquons quelques propriétés des fonctions presque analytiques univalentes.

LEMME I. — *Si* $w=f(z)$, $[f(0)=0]$ *est une fonction presque analytique et réalise une représentation homéomorphe du cercle* $|z|<1$ *sur le cercle* $|w|<1$ *et si* $0\leqq p(z)-1<\varepsilon$, *alors, quels que soient le point* z *et le nombre* ρ, $0<\rho<1-|z|$, *nous avons*

$$1-\eta(\varepsilon)<\left|\frac{f(z+\rho e^{i\varphi})-f(z)}{f(z+\rho e^{i\psi})-f(z)}\right|<1+\eta(\varepsilon), \qquad 0\leqq\varphi<2\pi, \qquad 0\leqq\psi<2\pi,$$

où $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon)=0$, $\eta(\varepsilon)$ *ne dépend que de* ε *et ne dépend pas de* f.

LEMME II. — *Quelle que soit la fonction analytique réelle* $x'=\varphi(x)$ *de la variable réelle* x, $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(1)=1$, $\varphi'(x)>0$ *pour* $|x|<1$, *on peut construire deux fonctions analytiques* $f_1(z)$ *et* $f_2(z)$ *telles que :*

a. $f(z)$ *est univalente pour* $|z|\leqq 1$, $\mathfrak{I}m\, z\leqq 0$; $f_2(z)$ *est univalente pour* $|z|\leqq 1$, $\mathfrak{I}m\, z\geqq 0$.

b. $f_1(x)=f_2[\varphi(x)]$, $-1<x<1$;

c. si $|z_1|\leqq 1$, $\mathfrak{I}m\, z_1<0$ *et* $|z_2|\leqq 1$, $\mathfrak{I}m\, z_2>0$, *alors* $f_1(z_1)\neq f_2(z_2)$.

3. *Théorème d'existence.* — Des lemmes 1 et 2, il est facile de déduire les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Quelles que soient les fonctions* $p(z)$, $[p(z)>1]$ *et* $\theta(z)$ *définies pour* $|z|\leqq 1$, $p(z)$ *continue pour* $|z|\leqq 1$ *et* $\theta(z)$ *continue si* $p(z)\neq 1$, *on peut construire une fonction presque analytique* $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, *qui réalise la représentation homéomorphe du cercle* $|z|<1$ *sur le cercle* $|w|<1$ *et qui possède des caractéristiques données* $p(z)$ *et* $\theta(z)$.

THÉORÈME 2. — *Soient* $p(z)$ *et* $\theta(z)$ *deux fonctions qui vérifient les conditions du théorème* 1 *pour* $z\neq 0$. *Désignons par* $q(r)$ *le maximum de* $p(z)$ *pour* $|z|=r$. *Si* $\displaystyle\int_0^r \frac{dr}{r\,q(r)}$ *est* divergente, *on peut construire une fonction presque analytique* $w=f(z)$ *dont les fonctions caractéristiques sont les fonctions* $p(z)$ *et* $\theta(z)$ *et qui réalise la représentation homéomorphe du cercle* $|z|<1$ *sur le cercle* $|w|<1$.

---

[1] *Ber. der Sachs. Acad. Wiss.*, **80**, 1928, p. 503.

4. *Applications analytiques.* — Les théorèmes suivants sont basés sur les théorèmes 1 et 2 et sur la remarque suivante : Soit $F(z)$ une fonction presque analytique dans le cercle $|z| < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, et soient $p(z)$ et $\theta(z)$ les fonctions caractéristiques de $F(z)$. Construisons la fonction $f(z)$ du théorème 2 et désignons par $z = \varphi(w)$ la fonction inverse de $f(z)$; alors la fonction $F[\varphi(z)]$ est une fonction analytique et régulière dans $|z| < 1$.

Théorème de M. Picard. — *Soit $w = f(z)$ une fonction presque analytique pour $|z| < 1$, $z' \neq 0$. Supposons que la caractéristique $p(z)$ vérifie les conditions du théorème 2 et que, pour $z \to 0$, la fonction $f(z)$ ne tende vers aucune limite finie ou infinie. Dans ces conditions, l'équation $f(z) = a$ admet une infinité de racines au voisinage du point $z = 0$, sauf peut-être pour une seule valeur a* (1).

Théorème d'unicité. — *Deux fonctions presque analytiques dans un domaine $\mathfrak{D}$, ayant les mêmes caractéristiques $p(z)$ et $\theta(z)$ et coïncidant sur un ensemble de points ayant un point limite dans $\mathfrak{D}$, coïncident identiquement.*

Théorème de Fatou. — *Si $f(z)$ est presque analytique et bornée pour $|z| < 1$ et si les caractéristiques $p(z)$ et $\theta(z)$ vérifient les conditions de Hölder*

$$|p(z + \Delta z) - p(z)| < |\Delta z|^{\alpha}, \qquad |\theta(z + \Delta z) - \theta(z)| < |\Delta z|^{\alpha},$$

il existe sur la circonférence $|z| = 1$ un ensemble E de mesure 2π tel que $f(z)$ tend vers une limite déterminée quand z tend vers un point quelconque de E en suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Ce théorème cesse d'être vrai si l'on remplace les conditions de Hölder par les conditions de continuité.

5. *Applications géométriques.* — Soit $S : \zeta = F(\xi, \eta)$ une surface dans l'espace euclidien, les fonctions F, $\partial F/\partial\xi$, $\partial F/\partial\eta$ étant définies et continues pour toutes les valeurs finies de ξ et η. D'après le théorème 1, on peut faire la représentation conforme de S sur le plan ou sur le cercle $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Dans le premier cas, on dit que la surface S est du type parabolique; dans le deuxième cas, que S est du type hyperbolique.

Théorème 3. — *Désignons par $q(z)$ le maximum de $|\operatorname{grad} F(\xi, \eta)|$ pour $\xi^2 + \eta^2 = z^2$. Si $\int_0^\infty dr/r\,q(r)$ diverge, S est du type parabolique.*

On peut indiquer quelques classes de surfaces S du type hyperbolique.

(1) M. Grötzsch a démontré cette proposition dans le cas où $p(z)$ est bornée (*loc. cit.*).