As an example we may analyse the case of the system of the second order with the characteristic function

$$H=\left(1+\frac{1}{t}\right)y^2+2xy+\left(1+\frac{1}{t^2}\right)x^2+e^{-t}\cdot H_3(x, y),$$

where $H_3(x, y)$ is any function that does not contain in its development terms of lower than the third order.

It is evident thas at $t>0$, H is a definite positive function. As

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}y^2-\frac{2}{t^3}x^2-e^{-t}\cdot H_3(x, y)$$

for every $t>0$ is a definite negative function, the trivial solution

$$x=y=0$$

of the corresponding canonical system is stable.

State Astronomical Institute.
Moscow.

Received
14.XI.1934.

МАТЕМАТИКА

А. БЕРМАНТ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ АБСОЛЮТНЫХ КОНСТАНТАХ ТИПА А. БЛОХА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 XII 1934)

1. Рассмотрим семейство функций $\{F(z)\}$

$$w=F(z)=z+a_2z^2+\ldots,$$

регулярных в круге $|z|<1$.

Известная теорема А. Блоха [1] состоит в следующем утверждении: риманова поверхность, производимая любой функцией семейства $\{F(z)\}$, содержит однолистный круг радиуса, не меньшего некоторой абсолютной константы B.

Из этой теоремы следует, что значения любой функции семейства покрывают круг (в плоскости w), радиус которого не меньше некоторой абсолютной константы $L\cdot(B\leqslant L)$.

Теорема о существовании константы L была в последующих работах (Монтель, Привалов, Валирон и др.) существенно дополнена. Наиболее сильным результатом в этом направлении является теорема Валирона (1926).

Обозначим через $C(R, \alpha)$, $R>0$, $0<\alpha<\pi$, всякую область, которая получается удалением из круга $|w|<R$ круга, видимого из начала координат под углом α, а через $R(\alpha, F)$ — наибольшее значение R, для которого существует область $C(R, \alpha)$, покрываемая значениями $F(z)$, при $|z|<1$. Валирон показал, что для каждого α, $0<\alpha<\pi$, существует положительная нижняя граница $V(\alpha)$ функционала $R(\alpha, F)$*.

До настоящего времени не известно как точных числовых значений констант B и L, так и вида функции $V(\alpha)$**

В настоящей заметке мы имеем в виду отметить один результат аналогичной теореме Валирона. Для полученной при этом абсолютной функции нам удается дать ее точное аналитическое выражение.

* Заметим, что $V(0)=0$.

** Для различных подсемейств семейства $\{F(z)\}$ (функции однолистные ограниченные, удовлетворяющие условию $F(z)\neq 0$ при $z\neq 0$) мы имеем ряд точных оценок для различных областей, покрываемых значениями функций этих классов (Кебе, Ландау, Каратеодори, Рогозинский).

2. Обозначим через $C(R, \alpha, q)$ любую область, получаемую удалением из круга $|w| < R$ криволинейного четырехугольника

$$\varphi < \arg w < \varphi + \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad r < |w| < qr, \quad 0 < r < 1.$$

Теорема. *Каковы бы ни были числа α и q, $0 < \alpha < \pi$, $q > 0$ и какова бы ни была функция $F(z)$ семейства $\{F(z)\}$, всегда существует область $C(V, \alpha, q)$, $V > 0$, покрываемая значениями $F(z)$, $|z| < 1$, где V зависит только от α и q. В случае, если α и q подчиняются условиям*

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < 2\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant d, & 0 < \alpha < \pi \\ 1 < q \leqslant \frac{1}{1-d}, & \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где d — некоторое положительное число, меньшее единицы (ниже определяемое), $V(\alpha, q)$ равно меньшему из двух чисел

$$\frac{|\nu'(1-e^{-i\alpha})|\,|1-e^{i\alpha}|}{2I\nu(1-e^{-i\alpha})}; \qquad \frac{|\nu'(1-q)|\cdot q(q-1)}{2I\nu(1-q)},$$

где ν — функция, обратная модулярной.

Полученные выражения для $V(\alpha, q)$ — окончательные: каково бы ни было $R > V(\alpha, q)$, существует функция семейства $\{F(z)\}$, значения которой при $|z| < 1$ не покрывают никакой области $C(R, \alpha, q)$.

Существование и выражение для $V(\alpha, q)$ получаются из решения следующей экстремальной задачи:

Пусть $\{f(z)\}$ семейство функций $w = f(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условиям:

1) $f(0) = 0$.

2) *Значения $f(z)$ не покрывают никакой области $C(1, \alpha, q)$.*

Требуется определить верхнюю границу значений функционала $|f'(0)|$ для всех функций семейства $\{f(z)\}$.

Обозначая через $K(\alpha, q)$ указанную верхнюю границу, очевидно будем иметь

$$V(\alpha, q) = \frac{1}{K(\alpha, q)}.$$

3. Укажем кратко на характер решения экстремальной задачи.

Каждая функция $w = f(z)$ семейства $\{f(z)\}$ должна выпускать по крайней мере две точки $w = re^{i\varphi}$ и $w' = r'e^{i\varphi'}$, причем

$$r \leqslant r' < 1,$$
$$|\varphi - \varphi'| > \alpha \quad \text{или} \quad |\varphi - \varphi'| \leqslant \alpha, \quad \frac{r'}{r} > q. \qquad (2)$$

Всякую функцию $w = f(z)$, выпускающую кроме таких двух точек еще какие-нибудь другие или имеющую кратные точки, можно на основании принципа Линделефа[2] исключить из рассмотрения. Таким образом, функцию, дающую верхнюю границу для $|f'(0)|$, нужно искать среди функций модулярного типа, определенных в $|z| < 1$, конечные исключительные значения которых удовлетворяют одному из условий (2).

Можно считать $w' = 1$, что выделит из указанного семейства модулярных функций функции с наибольшими возможными „растяжениями". При этом, растяжение σ (значение $|f'(0)|$) можно рассматривать как функцию второй выпускаемой точки w. С помощью ряда преобразований вопрос приводится к изучению выражения

$$\sigma = \left|\frac{1+u}{1-u}\right| \left|\frac{u'}{u}\right| |\zeta| \ln \left|\frac{1}{\zeta}\right|,$$

где $u=u(\zeta)$, $u(0)=0$, — функция, реализующая конформное отображение некоторого криволинейного треугольника с нулевыми углами на верхнюю полуплоскость. Каждому значению ζ (или u) соответствует определенное значение второй выпускаемой точки w и, следовательно, определенная функция модулярного типа.

4. Точке $\zeta=u=0$ отвечает $w=1$, что приводит к случаю совпадения двух выпускаемых точек, причем $\sigma=\infty$. Во всех остальных конечных точках полуплоскости u, σ есть непрерывная функция.

Сектору $|w|\leqslant 1$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\alpha$ соответствует некоторая конечная область в плоскости u, где функция σ достигает максимума $\sigma=K_1(\alpha)$ пусть в точке u_1. Последней пусть отвечает точка w_1. Следовательно, $K_1(\alpha)$ есть растяжение в начале координат модулярной функции, определенной в $|z|<1$ и выпускающей три значения: 1, w_1, ∞.

Сектору $|w|\leqslant\frac{1}{q}$, $-\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha$ соответствует также некоторая конечная область в плоскости u, где функция σ достигает максимума $\sigma=K_2(\alpha,q)$, пусть в точке u_2. Последней пусть отвечает точка w_2. Следовательно, $K_2(\alpha, q)$ есть растяжение в начале координат модулярной функции, выпускающей три значения: 1, w_2, ∞.

Большее из чисел $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha, q)$ и является искомым значением функции $K(\alpha, q)$.

При α и q, удовлетворяющих условиям (1), можно указать точное положение точек w_1 и w_2.

Линии „равного растяжения" $\sigma=C\geqslant C_0$ в ограниченной области при достаточно большом C_0 будут простыми, выпуклыми, замкнутыми кривыми линиями, окружающими точку $w=1$ и вложенными одна в другую.

Обозначим через d такое число, что линии „равного растяжения", проходящие через любую точку w, $|w-1|\leqslant d$, обладают всеми только-что указанными свойствами.

Мы находим, что $w_1=e^{i\alpha}$ и $w^2=\frac{1}{q}$. Точная граница $K(\alpha, q)$ равна большему из растяжений двух модулярных функций, характеризуемых следующими выпускаемыми точками: 1, $e^{i\alpha}$, ∞ и 1, $\frac{1}{q}$, ∞.

5. Если обозначить через ν функцию, обратную модулярной функции, определенной в верхней полуплоскости и выпускающей точки $0, 1, \infty$, то σ просто выражается через известное выражение Каратеодори

$$\sigma=\frac{2I\nu\left(1-\frac{1}{w}\right)}{\left|\nu'\left(1-\frac{1}{w}\right)\right|\left|\frac{1}{w}\right|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{1}{w}\right|}.$$

$K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha, q)$ суть максимальные значения этого выражения в соответствующих областях. Если имеют место условия (1), то $K(\alpha, q)$ равно большему из двух чисел:

$$\frac{2I\nu\left(1-e^{-i\alpha}\right)}{\left|\nu'\left(1-e^{-i\alpha}\right)\right|\left|1-e^{i\alpha}\right|};\quad \frac{2I\nu(1-q)}{|\nu'(1-q)|\cdot q};\quad \frac{1}{q-1}.$$

Если точка $\frac{1}{q}$ лежит внутри линии „равного растяжения", проходящей через точку $e^{i\alpha}$, то второе число будет больше. В противном случае большим будет первое число. *К этой последней константе приводит задача о покрытии сектора с вершиной в $w=0$ и раствором $2\pi-\alpha$.*

Аналогичным образом можно доказать теорему: *значения любой функции семейства* $\{F(z)\}$ *покрывают или круг* $|w| < A(k)$ *или кольцо*

$$kA(k) < |w| < KA(k),$$

где $1 < k < K \leqslant 1 + d$, *а* $A(k) = \dfrac{\left|\nu'\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\right|(k-1)}{2I\nu\left(1-\dfrac{1}{k}\right)k^2}$ (константа — точная).

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
1 XII 1934.

MATHÉMATIQUES

SUR LES CONSTANTES ABSOLUES ANALOGUES À LA CONSTANTE DE M. A. BLOCH

Par A. BERMANT et M. LAVRENTJEV

(*Présenté par I. Vinogradow, de l'Académie, le 1.XII.1934*)

1. Considérons une famille de fonctions $\{F(z)\}$

$$w = F(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

régulières à l'intérieur du cercle $|z| < 1$.

D'après un théorème bien connu de M. A. Bloch [1] on a le résultat suivant.

Quelle que soit la fonction $F(z)$, le domaine riemannien correspondant au cercle-unité contient un cercle à un seul feuillet de rayon supérieur à une certaine constante absolue B.

Il résulte évidemment de ce théorème que les valeurs d'une fonction quelconque de la famille couvrent dans le plan w un cercle dont le rayon est au moins égal à un nombre L, $(B \leqslant L)$, ce nombre étant le même pour toutes les fonctions de la famille.

Le théorème sur l'existence de la constante L a été complété essentiellement dans des travaux ultérieurs (Montel, Privaloff, Valiron). Le résultat le plus important dans cet ordre d'idées est dû à M. Valiron (1926).

Designons par $C(R, \alpha)$, $R > 0$, $0 < \alpha < \pi$, chaque domaine qu'on obtient en enlevant du cercle $|w| < R$ un cercle vu de l'origine des coordonnées sous un angle α. Soit $R(\alpha, F)$ la plus grande valeur de R telle qu'il existe un domaine $C(R, \alpha)$ couvert par les valeurs de $F(z)$ pour $|z| < 1$.

M. Valiron a démontré qu'il existe pour chaque α, $0 < \alpha < \pi$, une borne inférieure positive $V(\alpha)$ de la fonctionnelle $R(\alpha, F)$ *:

Jusqu'a présent on ne connaît ni les valeurs exactes de B et L, ni l'expression de la fonction $V(\alpha)$.**

Dans le présent travail nous donnons un résultat analogue au théorème de M. Valiron. Pour la fonction absolue qu'on obtient dans ce cas nous pouvons trouver une expression analytique exacte.

2. Désignons par $C(R, \alpha, q)$ un domaine quelconque qu'on obtient en enlevant du cercle $|w| < R$ un quadrilatère curviligne $\varphi < \arg w < \varphi + \alpha$,

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ r < |w|\ qr,\ 0 < r < 1.$$

* Remarquons que $V(0) = 0$.

** Pour certaines familles contenues dans la famille $\{F(z)\}$ (des fonctions univalentes, bornées, vérifiant la condition $F'(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$), on a evalué exactement certains domaines couverts par les valeurs des fonctions de ces classes (Koebe, Landau, Carathéodory, Rogosinsky).

Théorème. *Quels que soient les nombres α et q, $0<\alpha<\pi$, $q>0$, et quelle que soit la fonction $F(z)$ de la famille $\{F(z)\}$, il existe toujours un domaine $C(V, \alpha, q)$, $V>0$, couvert par les valeurs de $F(z)$ pour $|z|<1$, où la fonction V ne dépend que de α et q. Dans le cas où α et q vérifient les conditions*

$$\left.\begin{array}{ll} 0<2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant d, & 0<\alpha<\pi \\ 1<q\leqslant\frac{1}{1-d}, & \end{array}\right\} \tag{1}$$

où d, $0<d<1$, est un nombre que nous définissons par la suite, $V(\alpha, q)$ est le plus petit des deux nombres

$$\frac{|\nu'(1-e^{-i\alpha})|\,|1-e^{i\alpha}|}{2I\nu(1-e^{-i\alpha})}; \qquad \frac{|\nu'(1-q)|\cdot q(q-1)}{2I\nu(1-q)},$$

ν étant la fonction inverse de la fonction modulaire.

L'expression obtenue pour $V(\alpha, q)$ est définitive: quel que soit $R>V(\alpha, q)$, il existe un fonction de la famille $\{F(z)\}$ qui ne couvre aucun des domaines $C(R, \alpha, q)$. Nous obtenons l'existence et l'expression de $V(\alpha, q)$ en considérant le problème extrémal suivant:

Soit $\{f(z)\}$ une famille de fonctions $w=f(z)$ régulières dans le cercle-unité $|z|<1$ et jouissant des propriétés suivantes: 1) $f(0)=0$; 2) $f(z)$ ne couvre aucun domaine $C(1, \alpha, q)$. Il s'agit de trouver la borne supérieure pour les valeurs de la fonctionnelle $|f'(0)|$, $f(z)\subset\{f(z)\}$. Désignons par $K(\alpha, q)$ la borne supérieure indiquée; il est évident que l'on a

$$V(\alpha, q)=\frac{1}{K(\alpha, q)}.$$

3. Chaque fonction $w=f(z)$ vérifiant les conditions du problème extrémal omet de prendre au moins les deux valeurs $w=re^{i\varphi}$ et $w'=r'e^{i\varphi'}$,

$$\begin{gathered} \text{pour } r\leqslant r'<1, \\ |\varphi-\varphi'|>\alpha \quad \text{ou} \quad |\varphi-\varphi'|<\alpha, \quad \frac{r'}{r}>q. \end{gathered} \tag{2}$$

Chaque fonction $w=f(z)$ qui en plus de ces deux valeurs en omet encore d'autres ou bien qui a des points multiples peut être exclue de nos considérations en vertu du principe de Lindelöf([2]). Ainsi, la borne supérieure $K(\alpha, q)$ doit être cherchée parmi les valeurs $|f'(0)|$, les fonctions $f(z)$ etant des fonctions de type modulaire, définies dans $|z|<1$ et dont les valeurs exceptionnelles finies vérifient l'une des conditions (2).

On peut prendre $w'=1$; on obtient alors dans la famille indiquée des fonctions modulaires, celles qui ont les plus grandes valeurs de $|f'(0)|$. On peut d'ailleurs considérer la valeur $\sigma=|f'(0)|$ comme une fonction du second point exceptionnel w. Au moyen de quelques transformations la question se réduit à l 'examen de l'expression

$$\sigma=\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\cdot\left|\frac{u'}{u}\right|\cdot|\zeta|\cdot\ln\left|\frac{1}{\zeta}\right|,$$

où $u=u(\zeta)$, $u(0)=0$, est une fonction réalisant la représentation conforme d'un certain triangle curviligne sur le demi-plan supérieur. Il correspond à chaque valeur de ζ (ou de u) une valeur bien déterminée du second point exceptionnel w, donc une fonction bien déterminée de type modulaire.

4. Au point $\zeta=u=0$ correspond la valeur $w=1$, ce qui conduit au cas où les deux points exceptionnels coïncident, et d'ailleurs $\sigma=\infty$. Dans tous les autres points finis du demi-plan u la fonction σ est continue.

Il correspond au secteur $|w| \leqslant 1$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \alpha$ un certain domaine fini dans le plan des u, où la fonction σ atteint son maximum $\sigma = K_1(\alpha)$ en un certain point u_1. Soit w_1 le point que correspond à u_1. Donc $K_1(\alpha)$ est la valeur de $|f_1'(0)|$, $f_1(z)$ étant une fonction modulaire définie dans $|z| < 1$ et ne prenant pas les valeurs $1, w_1, \infty$.

Il correspond de même au secteur $|w| \leqslant \frac{1}{q}$, $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, un certain domaine fini dans le plan des u, où la fonction σ atteint son maximum $\sigma = K_2(\alpha, q)$ en un certain point u_2. Soit w_2 le point qui correspond à u_2. Donc, $K_2(\alpha, q)$ est la valeur de $|f_2'(0)|$, $f_2(z)$ étant une fonction modulaire ne prenant pas les valeurs $1, w_2, \infty$.

Le plus grand des deux nombres $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha, q)$ est la borne exacte $K(\alpha, q)$ cherchée. Si α et q vérifient les conditions (1), on peut indiquer le lieu exact des points w_1 et w_2. Les lignes où σ est constant, $\sigma = C \geqslant C_0$, situées dans un domaine borné sont, pour C_0 assez grand, des contours convexes fermés entourant le point $w = 1$ et contenant les uns les autres.

Soit d un nombre tel que les lignes $\sigma = \text{const.}$ passant par un point arbitraire w, $|w - 1| \leqslant d$ jouissent de toutes les propriétés indiquées.

Nous trouvons $w_1 = e^{i\alpha}$ et $w_2 = \frac{1}{q}$. $K(a, q)$ est égale à la plus grande des deux valeurs $|f_1'(0)|$ et $|f_2'(0)|$ où les fonctions modulaires $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont caractérisées par leurs points exceptionnels $1, e^{i\alpha}, \infty$ et $1, \frac{1}{q}, \infty$.

5. Si l'on désigne par ν la fonction inverse de la fonction modulaire, définie dans le demi-plan supérieur et ne prenant pas les valeurs $0, 1, \infty$ on peut exprimer σ simplement au moyen de l'expression connue de Carathéodory

$$\sigma = \frac{2I\nu\left(1 - \frac{1}{w}\right)}{\left|\nu'\left(1 - \frac{1}{w}\right) \cdot \left|\frac{1}{w}\right|\right.} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{w}\right|}.$$

$K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha, q)$ sont les valeurs maxima de cette expression dans les domaines correspondants. Si les conditions (1) sont vérifiées, $K(\alpha, q)$ est le plus grand des deux nombres

$$\frac{2I\nu(1 - e^{-i\alpha})}{|\nu'(1 - e^{-i\alpha})| \cdot |1 - e^{i\alpha}|}; \qquad \frac{2I\nu(1 - q)}{|\nu'(1 - q)| \cdot q} \cdot \frac{1}{q - 1}.$$

Si le point $\frac{1}{q}$ est à l'intérieur de la ligne $\sigma = \text{const.}$ passant par le point $e^{i\alpha}$, le second nombre surpasse le premier. On a l'inverse dans le cas contraire. *On arrive à cette dernière constante en cherchant à resoudre le problème du recouvrement d'un secteur ayant le sommet au point $w = 0$ et l'angle égal à $2\pi - \alpha$.*

On démontre d'une manière analogue le théorème: *les valeurs d'une fonction quelconque de la famille $\{F(z)\}$ couvrent ou bien le cercle $|w| < A(k)$ ou bien l'anneau $kA(k) < |w| < KA(k)$*, où $1 < k < K < 1 + d$, et

$$A(k) = \frac{\left|\nu'\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right| (k - 1)}{2I\nu\left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot k^2} \quad \text{(cette constante est exacte).}$$

Institut mathématique V. Stekloff.
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu le 1.XII.1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] Bloch. Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 3-e série, t. XVIII, 1925. [2] Lindelöf. Acta Soc. Sci. Fenn., t. XXXV, 7, 1908.