Доклады Академии Наук СССР
1936. Том IV (XIII), № 5 (109)

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ *

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 X 1936)

Для упрощения формулировки основной теоремы введем понятие относительного расстояния между двумя произвольными точками односвязной области. Пусть D—произвольная односвязная, ограниченная область, содержащая точку $z=0$, пусть Γ—граница D и пусть z_1 и z_2—две произвольные точки области D. Обозначим через $\rho_1(z_1, z_2)$ нижнюю границу длин линий, содержащихся в D и соединяющих точки z_1 и z_2; обозначим через $\rho_2(z_1, z_2)$ нижнюю границу длин линий, разбивающих D на две односвязные области так, что точки z_1 и z_2 будут принадлежать той из этих областей, которая не содержит точки $z=0$. Меньшее из двух чисел $\rho_1(z_1, z_2)$ и $\rho_2(z_1, z_2)$ мы назовем о т н о с и т е л ь н ы м р а с с т о я н и е м м е ж д у т о ч к а м и z_1 и z_2; мы будем обозначать это расстояние через $\rho(z_1, z_2, D)$.

Граничной «точкой» области D мы назовем каждую последовательность точек области D: $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ такую, что все ее предельные точки принадлежат Γ и

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \rho(z_n, z_m, D) = 0.$$

Две точки $\{z_n^{(1)}\}$ и $\{z_n^{(2)}\}$ мы будем считать идентичными, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, D) = 0.$$

Пусть теперь $t_1 = \{z_n^{(1)}\}$ и $t_2 = \{z_n^{(2)}\}$—две произвольные «точки» замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, число

$$\rho(t_1, t_2, D) = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, D)$$

мы будем называть относительным расстоянием между «точками» t_1 и t_2.

Нетрудно видеть, что понятие «граничная точка» совпадает с понятием «простой конец», введенным Каратеодори.

При принятых определениях имеет место следующая теорема.

* В несколько менее общем виде эти результаты были доложены на 2-м Всесоюзном математическом съезде в 1934 г.

Теорема. *Пусть $z = f(w)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, функция, однолистная и ограниченная в единичном круге $|w| < 1$, $|f(w)| < M = \text{const}$ и пусть D есть область, образованная значениями $f(w)$ при $|w| < 1$. Имеем*

$$|w_2 - w_1| < K_1 \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}, \tag{a}$$
$$\rho(z_1, z_2, D) < K(M)\,|\log|w_2 - w_1||^{-\frac{1}{2}}, \tag{b}$$

где w_1 и w_2 суть две произвольные точки замкнутого круга $|w| \leqslant 1$, z_1 и z_2 суть соответствующие точки области D, $z_1 = f(w_1)$, $z_2 = f(w_2)$, K_1—абсолютная константа и $K(M)$ зависит только от M.

В силу принятых определений и характера искомых оценок (a) и (b) теорему достаточно доказать для случая, когда граница Γ области D есть замкнутая аналитическая кривая и когда точка w_1, w_2 принадлежит окружности $|w| = 1$.

Докажем неравенство (a). Пусть t есть точка Γ, «ближайшая» (в смысле относительного расстояния) к z_2, и пусть s есть соответствующая точка окружности $|w| = 1$, $t = f(s)$. Пусть γ есть дуга, определяющая относительное расстояние между точками z_1 и t.

Обозначим через $D_1 = D_1(\gamma)$ односвязную область, содержащую точку $z = 0$, содержащуюся в D, граница Γ_1 которой содержит дугу γ. Пусть при отображении D_1 на круг $|w| < 1$, $w = \varphi_1(z)$, $\varphi_1(0) = 0$ дуге γ отвечает дуга длины l. В силу принципа Монтеля (1) имеем $l > |w_1 - s|$, с другой стороны, в силу теоремы Шмидта (2) $l < K'\sqrt{\rho(z_1, s, D)}$. Следовательно

$$|w_1 - s| < K'\sqrt{\rho(z_1, s, D)} < K'\sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}.$$

Для оценки $|w_2 - s|$ рассмотрим два случая: 1) $|z_2 - t| \leqslant \rho(z_1, z_2, D)$, но тогда в силу теоремы искажения Кöбе (3) получим

$$|w_2 - s| < K''\sqrt{\rho(z_1, z_2, D)};$$

2) $|z_2 - t| > \rho(z_1, z_2, D)$. Построим, как выше, дугу γ, определяющую относительное расстояние между z_2 и t и область $D_1 = D_1(\gamma)$. При отображении $w = \varphi_1(z)$ дуге γ будет отвечать на окружности $|w| = 1$ дуга длины меньше, чем $K'\sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$, следовательно при отображении $z = f(w)$ дуга γ перейдет в дугу круга $|w| < 1$ диаметра не больше, чем $K''\sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$. Отсюда, замечая, что t расположена вне D_1, получим $|w_2 - s| < K''\sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$. Искомая оценка (a) получится из сопоставления полученных оценок для $|w_2 - s|$ и $|w_1 - s|$.

Укажем на идею доказательства неравенства (b). Ограничимся случаем, когда z_1 и z_2 расположены на Γ. Проведем в круге $|z| < 2M$ аналитическую дугу L, соединяющую точки $z = 0$ и $z = 2M$ и такую, что две нормали к L, выходящие из двух различных точек L и равные по длине $\rho_0 = \rho(z_1, z_2, D)$, не имеют общих точек. Пусть Δ есть область, которую опишет круг радиуса ρ_0, когда его центр опишет L. Так как площадь Δ не превосходит $\pi(2M + \rho_0)^2$, то следовательно длина L не больше $\frac{\pi(2M + \rho_0)^2}{\rho_0}$. Фиксируем кусок γ границы Δ, принадлежащий окружности $|z - 2M| = \rho_0$. Отобразим конформно $w = \varphi_1(z)$, $\varphi_1(0) = 0$ область Δ на круг $|w| < 1$ и пусть h есть длина дуги окружности $|w| = 1$, в которую при этом переходит дуга γ. С одной стороны, отображая Δ на прямоугольник ширины $2\rho_0$ и используя лемму Гретша ([4]), нетрудно видеть, что

$$h > e^{-\left(\frac{K(M)}{\rho_0}\right)^2},$$

с другой стороны, применяя принцип Монтеля, легко показать, что, каковы бы ни были точки z_1 и z_2, $\rho(z_1, z_2, D) = \rho_0$, линию L можно всегда подобрать так, чтобы $h < |w_2 - w_1|$. Сопоставляя обе полученные оценки, мы приходим к неравенству (b).

Отметим в заключение некоторые следствия из приведенной теоремы: 1) теорема Каратеодори о взаимно однозначном соответствии простых концов при конформном отображении, 2) теоремы Куранта и Фарреля о равномерной сходимости последовательностей однолистных функций.

Академия Наук СССР.
Математический институт им. В. А. Стеклова.
Москва.

Поступило
2 X 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pólya u. Szegö, Lehrsätze aus der Analysis, II, № 131. [2] М. Лаврентьев, Труды Математич. ин-та АН СССР, V, стр. 190. [3] G. Pólya u. Szegö, loc. cit., № 152. [4] Grotzsch, Ber. der Sächs. Acad. Wiss. (1928).