МЕТРИКИ КЛАССА 2*

В заметке [1] нами были даны необходимые и достаточные условия того, что данная метрика $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\,\omega^j$ $(i, j = 1, ..., m,\ \omega^i$ - линейные формы от дифференциалов $du^1,..., du^m)$ имеет класс, равный q, для случая, когда тип метрики $t \geqslant 3$.

Общая теория применима полностью и к случаю $q = 2$. Таким образом, подлежат исследованию метрики типа $t \leqslant 2$. В случае метрик класса 2 можно сформулировать следующую теорему

Теорема 1. *Дня того чтобы метрика*

$ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\,\omega^j,\qquad i, j = 1, ..., m$

типа $t \geqslant 2$ имела класс $\leqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы существовала система форм $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s = \lambda^s_{ij}\,\omega^j, = \lambda^s_{ij}$ $s = 1, 2$, $i = 1,..., m$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{s=1}^{2}\left[\psi_i^s\psi_j^s\right] = \Omega_{ij} = R_{ij,\,kl}[\omega^k\,\omega^l]\ ; \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta^1 & \\ & (i\psi_j^2)\end{bmatrix} = [\Delta^2\,{}_{(i\,\psi_j^1)} = 0\ ];\quad \begin{bmatrix}\Delta^2 & \\ & (i\psi_j^1)\end{bmatrix} = [\Delta^2\,{}_{(i\,\psi_j^2)}] = 0, \tag{2}$$

где

$$\Delta_i^s = (\psi_i^s)' - [\omega_i^j\ \psi_j^s],\qquad s = 1, 2,\qquad i, j = 1,\ldots m. \tag{3}$$

Условия (1) суть условия Гаусса, условия (2) эквивалентны условиям Кодацци - Риччи.

В дальнейшем рассматриваются метрики типа t = 2 и ранга > 4.

Согласно теореме 2 заметки [1], в случае $t \geqslant 2$ ранг и тип метрики совпадают с соответствующими инвариантами поверхности, реализующей метрику. Как известно [2], поверхности типа 2 суть или поверхности ранга $r = 4$, 5 или, в случае $r > 5$, подповерхности гиперповерхности ранга 2.

Это означает, что формы $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s$. должны удовлетворять альтернативе:

1) ранг $\{\psi_i^s\} > 5$, но зато имеется комбинация $\psi_i = \lambda\,\psi_i^1 + \mu\,\psi_i^2$ ранга 2;

2) ранг$\{\psi_i^s\} = 5$ (случай $r = 4$ исключается из рассмотрения).

В случае 1) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $t = 2$ и $r > 5$, то система уравнений*

$[\phi_{\alpha\beta}\,\varphi] = 0$,

где

$\phi_{\alpha\beta} = [\,\Omega_{(\alpha_1\beta_1}\Omega_{\alpha_2\beta_2)}\,]$

и симметрирование производится по $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\beta_1\,\beta_2)$ в отдельности, φ - линейная форма от $\omega^1,..., \omega^m$, имеет два и только два линейно независимых решения φ_1, φ_2.

Это условие проверяется, а формы φ_1, φ_2 находятся с помощью операций линейной алгебры.

Пусть $I_1 \ldots I_m$, – репер, в котором

$\{\omega^1, \omega^2\}\quad \infty\{\varphi_1, \varphi_2\}$,

где значок ∞ означает, что формы ω^1, ω^2' разлагаются по формам φ^1, φ^2 и обратно.

Репер $\{I_1 \ldots I_m,\}$, формы ω^i, Ω_{ij} и компоненты g_{ij} находятся с помощью линейного алгоритма.

Пусть форма $\psi(d)$ определяется с помощью равенства

$$\psi(d) = \Delta^{-1/2}\begin{vmatrix}\Omega_{31}(d,\delta_1) & \Omega_{31}(d,\delta_1)\\ \Omega_{31}(d,\delta_1) & \Omega_{31}(d,\delta_1)\end{vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix}\Omega_{12}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2,d) & \Omega_{12}(d,\delta_1)\\ \Omega_{23}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{23}(\delta_2,d) & \Omega_{23}(d,\delta_1)\\ \Omega_{31}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{31}(\delta_2,d) & \Omega_{31}(d,\delta_1)\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Образуем (m + 1)-мерную метрику

$$ds^2 = g_{ij}\,\overline{\Omega}^i\,\overline{\Omega}^j + t^2\psi^2, \tag{9}$$

где

$$\overline{\Omega}^i = \omega^i + \delta_3^i\,dt + t\omega_3^i. \tag{10}$$

---

*Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С 667-669.

Легко видеть, что метрика ds^2 есть включающая по отношению к метрике ds^2 , т.е. при $t = 0$ ds^2 переходит в $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j$

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы метрика* $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j$ *типа* $t = 2$ *и ранга* > 5 *имела класс* $\leqslant 2$, *необходимо и достаточно, чтобы метрика* ds^2, *построенная вышеуказанным образом, имела класс* $\leqslant 1$.

Рассмотрим случай 2), когда ранг метрики равен 5.

Рассмотрим систему

$$[\Phi_{ij}\ \varphi_l] = 0, \qquad (11)$$

где i произвольно фиксировано, j меняется от 1 до m ($i = 1,..., m$).

Т е о р е м а 4. *Если метрика типа* $t = 2$ *имеет ранг 5, то возможны только два случая:*

а) *система* (11) *имеет только два линейно независимых решения* φ_i^1, φ_i^2 ;

б) *система* (11) *имеет три линейно независимых решения* φ_i^1, φ_i^2, φ_i^3.

В случае а), согласно теореме 6 [1], необходимое и достаточное условие разрешимости системы

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^{2}[\psi_i^s\psi_j^s], \qquad I,j = 1, \ldots m$$

состоит в том, что система скалярных произведений

$$L_{ij1\,1} = \frac{[\Omega_{ij}\varphi_i^2\varphi_j^2]}{[\varphi_i^1\varphi_i^2\varphi_j^1\varphi_j^2]} \qquad L_{ij1\,2} = \frac{[\Omega_{ij}\varphi_i^2\varphi_j^1]}{[\varphi_i^1\varphi_i^2\varphi_j^1\varphi_j^2]},$$

$$L_{ij2\,1} = \frac{[\Omega_{ij}\varphi_i^1\varphi_j^2]}{[\varphi_i^1\varphi_i^2\varphi_j^1\varphi_j^2]} \qquad L_{ij2\,2} = \frac{[\Omega_{ij}\varphi_i^1\varphi_j^1]}{[\varphi_i^1\varphi_i^2\varphi_j^1\varphi_j^2]}$$

имеет класс 2.

Формы ψ_i^1, ψ_i^2 могут быть явно выражены через φ_i^1 , φ_i^2 [1].

В силу теоремы 1, для того, чтобы метрика имела класс 2, необходимо и достаточно, чтобы определенные таким образом формы φ_i^s. удовлетворяли условиям (2).

В случае б) вновь оказывается возможным построить включающую метрику.

Пусть $I_1 \ldots I_m$ - репер, в котором

$$\omega^1, \omega^2, \omega^3 \infty \varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3$$

(i произвольно фиксировано),

$$\psi = \Delta^{-1/2}\begin{vmatrix} \Omega_{41}(d,\delta_1) & \Omega_{41}(d,\delta_1) \\ \Omega_{41}(d,\delta_1) & \Omega_{41}(d,\delta_1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{12}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2,d) & \Omega_{12}(d,\delta_1) \\ \Omega_{24}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{24}(\delta_2,\delta_2) & \Omega_{24}(d,\delta_1) \\ \Omega_{41}(\delta_1,\delta_2) & \Omega_{41}(\delta_2,d) & \Omega_{41}(d,\delta_1) \end{vmatrix},$$

$$ds^2 = g_{ij}\overline{\Omega}^i\overline{\Omega}^j + t^2\psi^2,$$

где

$$\overline{\Omega}^i = \omega^i + \delta_4^i\,dt + t\omega_4^i.$$

Тогда для того, чтобы метрика $ds^2 = g_{ij}\ \omega^i\ \omega^j$ имела класс $\leqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы ds^2 имела класс $\leqslant 1$.

Заметим, что мы рассматриваем метрику в репере общего положения, т.е. предполагаем, что все соотношения типа $f \neq 0$, которые могут быть получены в результате преобразования репера выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яненко Н.Н.* // ДАН СССР. 1952. Т. 83, № 4.
2. *Яненко Н.Н.* // Там же. 1949. Т. 64, № 5.