

Математическое  
~~Уточнение~~ моделирование в механике сплошных  
 сред.

1. Что такое "сплошная среда"

Само по себе понятие "сплошная среда" есть  
 математическая модель, описывающая  
 взаимовзаимодействие и движение тел

NR Можем говорить о концепции ~~и~~ сплошной среды

набор континуальных (вектор-функций)

~~континуальных~~ непрерывных аргумента определенных  
 в некоторой области фазового пространства.

т.о. мы имеем здесь

дискретизация

переход от дискретных к континуальным  
 моделям

Появление дискретных и локальных

моделей

там, в модели Матка-Дермиди конденсированной

материала в области ат модели Бляумена,

а также ~~не рассматривается~~ ~~как~~ как

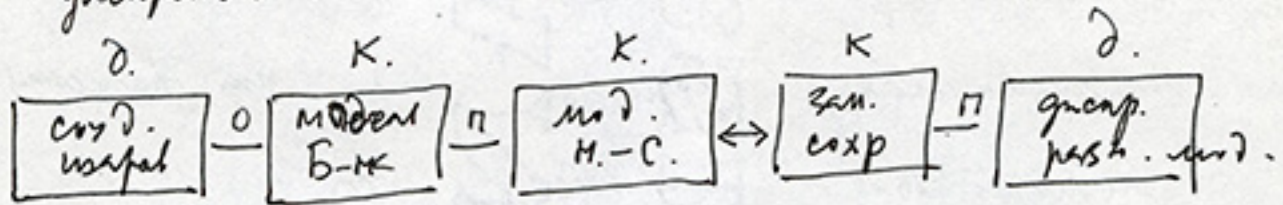
дискретизация, набор, системы

электронной рассматривается на электронные

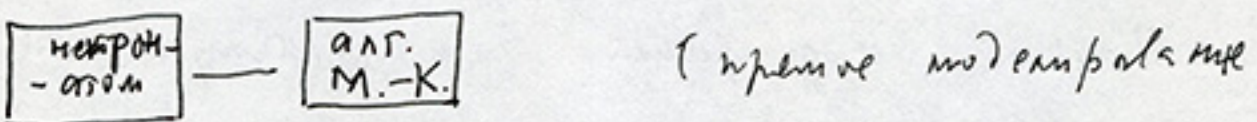
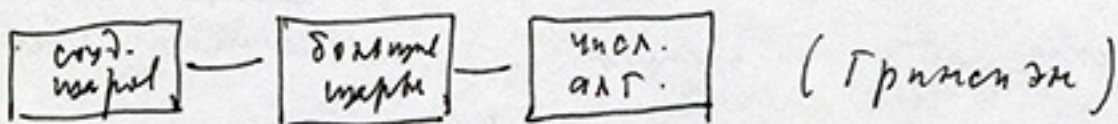
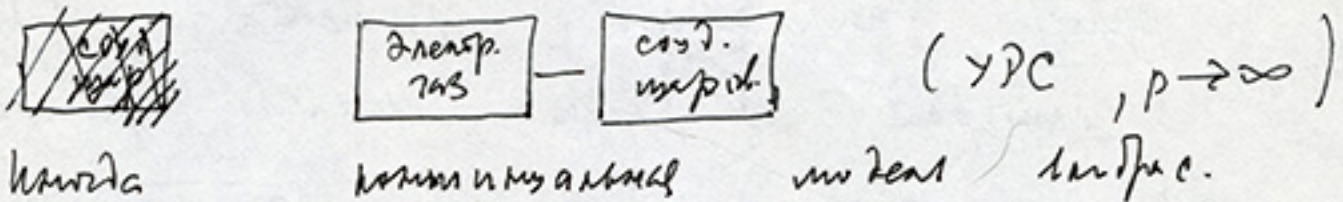
гАЗ в поле (едер)



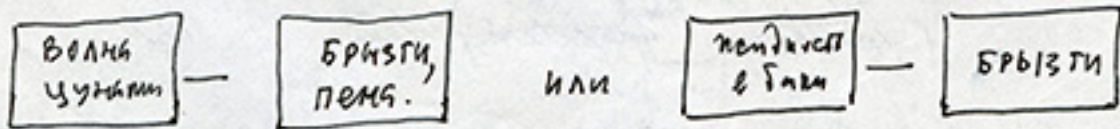
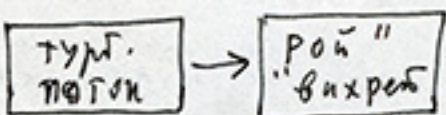
2. Математическая модель сложной среды должна содержать элементы переносов от дискретных моделей к комбинационным и от комбинационных к непрерывным.



Везде должна содержаться дополнительная информация. Так в модели Т.-Ф.



Дискретизация





независимы от <sup>-2-</sup> меха звенит

3. Переход : процесс — конт. модель  
недоосажен . Уточка домена завершена  
используют алгоритмом

Притмы:

- а) противоречивость или неполнота конт. модели  
(взаимн. исключительность представлений и  
предсформе с физич. процесс)
- б) неадекватность континентальной модели
- в) функционал количественный конт. модели  
(изменение в положении)
- г) аппроксимация иониз дисперсионная

4. Разм. саяма на саяма. модель

- а) модель Минатоки конт. резонанс
- б) пример разм. саяма, нормализованных  
 $\infty$  дис. урн; некоррелированных  
дис. урн (по предмету мере  
в математическом смысле)

Схемы в) Ланга, Дюррота Установит гр. обхода.

5. Классы моделей

- а) урн в разн. урн, интер.;  
инт. — дис. (конт. модель)



5) одим. груп. урне (мисл. Англија)



неодимност  
(метод) тасување, метод <sup>за неопределени</sup> <sub>вонред</sub>

6. Меќласникоме модели.

5а) интерпол-олимент. урне (ур. В. В.)

различне перауди <sup>Универзитет</sup> <sub>метод</sub>

б) звлеме с. брнц. <sup>лимити</sup>

7. а) неолоном. урне <sup>сво</sup>  
Координативна <sub>сво</sub>;

Поле локалних <sup>сво</sup> (пир. <sub>сво</sub>)

? Кога применета МКЗ; МЧ.

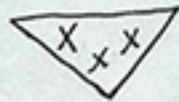
8. неопределени <sup>сво</sup>

а) <sup>сво</sup> <sub>сво</sub>

б) <sup>сво</sup> - <sub>сво</sub>

(метод <sup>сво</sup> на <sub>сво</sub>)

в) <sup>сво</sup> - <sub>сво</sub> <sup>сво</sup> (?)

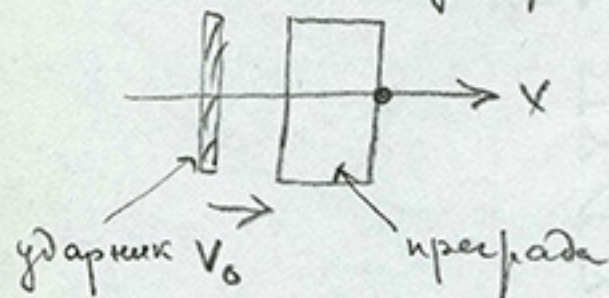


Примеры.

9. САПР  
10. Авт. <sup>сво</sup>



2. Скорость движения свободной поверхности пластины от  $x$  в зависимости от скорости соударения в задаче



Спешная кривая гидро-динамическая модель  
 $\circ \circ$  - эксперимент  
 Дислокационная модель  $\square$  лучше всех описывает процесс пластины.

1.3. Проводиме возниие недеформирруемым ударником прирада конечной ширины и сравнение с данными экспериментов.

2.3. Явление взаимодействия с прирадой при  $V_0 \leq 1 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$  с учётом разрушения и отскоков.

4.6. Образование кумулятивной струи в газодинамическом приближении при соударении двух пластин.

5.7. Сетка и её пример.

6-8. Явление отскока тела в  $(x, y, z, t)$  - постановке.

9.11. Штамповка деталей сложной формы из титана под действием импульсного  $\Sigma$  нагружения.



10<sup>12</sup>. Эффект разрушения уд. в. при  
обтекании тел замкнутым потоком  
газа.

6. Неклассические модели.

Пример: явление с отрицательной вязкостью, травитирующий шар, неголономные уравнения состояния

7. Координатная сетка, информационная среда.

8. Неоднородные среды.



# Модель жидкости со закопеременной вязкостью

---

2-мерные уравнения типа Навье-Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu(s) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu(s)) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\nu(s) = \nu_0 + \nu_1 \sqrt{s} + \nu_2 s, \quad \nu_1^2 - 4\nu_0\nu_2 > 0,$$

$$s = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2$$

Коэффициент вязкости — функция второго инварианта тензора скоростей деформации



Пусть  $\vec{u} = \{u(y), 0\}$ , тогда

$$\frac{d}{dy} \left[ \omega \left( \frac{du}{dy} \right) \right] = a,$$

$$\omega(p) = (\nu_0 + \nu_1 p + \nu_2 p^2) p,$$

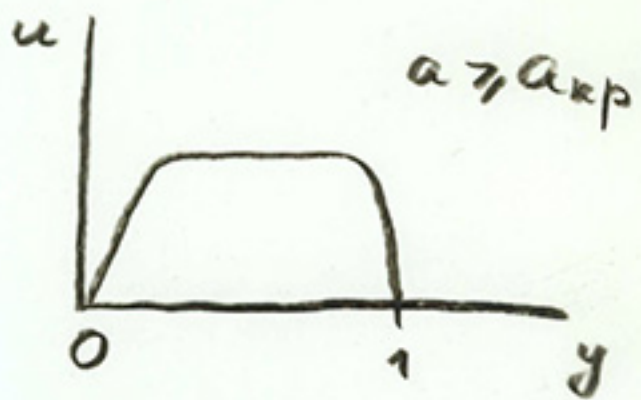
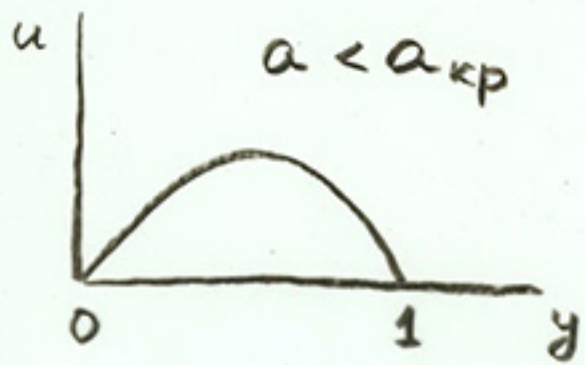
$a$  - аналог перепада давления

$$(*) \omega \left( \frac{du}{dy} \right) = ay + b.$$

Из (\*) следует:

если  $a < a_{кр}$ , то суц. гладкие решения типа решения Пуазейля;

если  $a \geq a_{кр}$ , то суц. решения с профилем сколь угодно большой наполненности.





Распад разрыва  
в неупругой сплошной среде  
с внутренними изменениями

---

$$\begin{cases} v_t = a \varepsilon_x + b \theta_x + c_\alpha \chi_x^\alpha, \\ \varepsilon_t = v_x, \quad \theta_t = f v_x + d, \\ \chi_t^i = \varphi^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

$v$  - скорость,  $\varepsilon$  - деформация,

$\theta$  - температура,  $\chi^i$  - внутренние переменные;

функции  $a, b, c_\alpha, f, d$  и напряжение  $\sigma$  - функции свободной энергии, которая считается заданной. Считаем выполненными условия

$A^2 \equiv a + b f > 0, A > 0, A_\varepsilon + f A_\theta < 0$  - система (1) гиперболическая



6

Обобщение волн Римана на неоднородные системы уравнений — решения, характеризующие дифференциальными связями.

Задача: распространение волны в материале, с постоянными начальными данными с разрывом при  $t=0, x=0$ .

Решение, непрерывно прилигающее к покою  $\partial u / \partial x = 0$  на характеристике  $dx/dt = (-1)^k A$ ,  $x(0) = 0$ , удовлетворяет дифференциальным связям

$$\begin{cases} (-1)^k A v_x + a \varepsilon_x + b \theta_x = 0 \\ \theta_x - f \varepsilon_x = 0 \\ \chi_x^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2)$$

Считаем, что решение, непрерывно прилигающее к покою, удовлетворяет этим диф. связям и в области.



Решение задачи о распаде разрыва  
 для  $(b, v)$  диаграммы представлено  
 на слайде. В областях  $I, \bar{VI}$ -  
 покой, в областях  $\bar{II}, \bar{III}, \bar{IV}, \bar{V}$ -  
 решение со связями (2).



8

## Подвижные сетки, зависящие от характера течения

Разностная сетка существует в подобластях с большими градиентами. Способ построения — сочетание вариационного принципа с геометрическим методом.

Сеточные координатные линии строят по их кривизне и параметру сужения, которые определяют кривизной границу области и уточняют ~~то~~ с помощью требования близости сетки к ортогональной и сужения её узлов в областях с большими градиентами.



Плоская задача о косом ударе  
пластины о твёрдую преграду с  
образованием кумулятивной  
струи небольших размеров.

Газодинамическое приближение  
с уравнением состояния

$$p = (\alpha - 1) p_e + (p - p_0) c_0^2,$$

$\alpha, p_0, c_0$  — константы,  $e$  — удельная  
энергия.



Дифференциальный анализатор

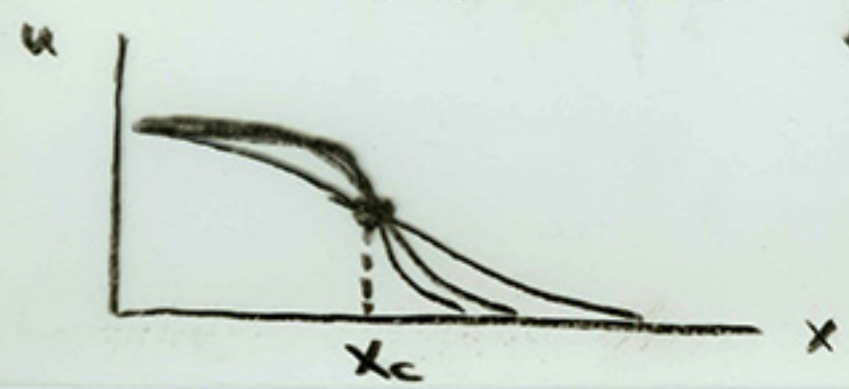
Локализация ударных волн и контактных разрывов по результатам сквозного численного расчёта задач газодинамики.

Пусть  $u_\mu(x, t)$  - решение задачи Коши

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + u_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \mu > 0,$$

$$u_\mu(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad u_1 > u_2. \quad (1)$$

а) При любом фиксированном  $t > 0$  сущ. точка  $(x_c, t)$ , в которой пересекаются решения задачи (1), полученные при различных  $\mu > 0$ .





$$5) \max_x \left| \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right|_{x=x_c} \quad 11$$

в) геометрическое место точек  $(x_c, t)$  образует в плоскости  $(x, t)$  линию, которая совпадает с траекторией разрыва в решении  $u(x, t)$  задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \quad u_1 > u_2 \end{cases}$$

Таким образом, при каждом фикс.  $t > 0$  сущ. точка  $(x_c, t)$ , в которой величина  $u_\mu(x_c, t)$  не зависит от  $\mu$ ; эта точка — центр «размазанного» разрыва — совпадает с точкой положения разрыва в решении задачи (2).

Практическое приложение — в задачах сильного суждения.



# Газодинамические процессы в нейтронном веществе с немонокотонными уравне- ниями состояния

---

Нейтронные звёзды:

масса  $\sim 1 M_{\odot}$  (масса Солнца),

радиус  $\sim 10$  км,

плотность в центре  $\sim 10^{14} \div 10^{15}$  г/см<sup>3</sup>.

При  $\rho > \rho_{кр} \approx 4 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>

в нейтронном веществе возможен процесс конденсации  $\pi$ -мезонов (пионов), и плотность ~~вещи~~ энергии вещества можно описать формулой:

$$\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \varepsilon_N(\rho) - \frac{1}{2} \beta(\rho) (\rho - \rho_{кр})^2, & \rho > \rho_{кр} \\ \varepsilon_N(\rho), & \rho < \rho_{кр} \end{cases}$$



$$\beta(r) = a + b (r_{кр}/r) + c (r_{кр}/r)^2,$$

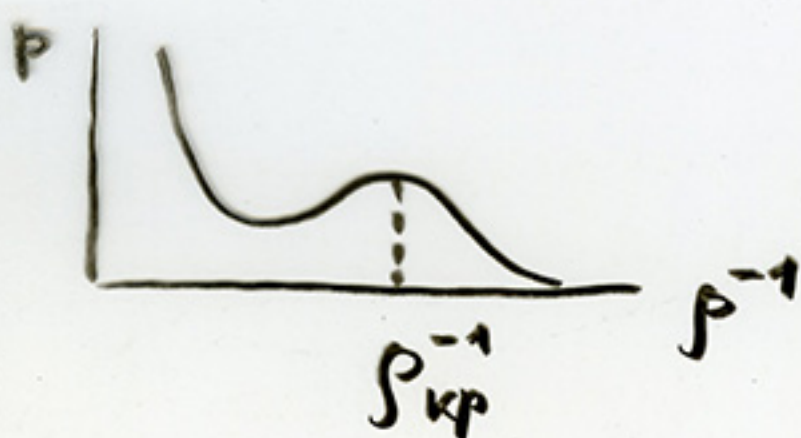
$a, b, c$  - ~~некие~~ параметры.

При некотором наборе параметров  $a, b, c, r_{кр}$  уравнение состоит,

$$p = p(r)$$

может стать  
немонотонным

$$p = r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{\varepsilon}{r} \right)$$



область, где  
 $\frac{dp}{d(r^{-1})} > 0$ ,  
неустойчива.

Решают уравнения гравитационной газодинамики в приближении ньютоновской теории тяготения (НТТ) и общей теории относительности (ОТО).



# Полупроводники

3 типа моделей для описания поведения носителей зарядов (электронов и дырок) в полупроводниках.

1) Кинетическая модель:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_j}{m_j^*} \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f_j}{\partial t} \right)_{ст.}$$

$$j = \begin{cases} e - \text{электроны,} \\ p - \text{дырки;} \end{cases}$$

$m^*$  - масса,  $f$  - функция распределения,

$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{ст.}$  - изменение  $f$  вследствие рассеяния носителей заряда на атомах кристаллич. решётки

$$\vec{F}_e = e \nabla \varphi, \quad \vec{F}_p = -e \nabla \varphi,$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e \int (f_p - f_e) d\vec{v},$$

$\varphi$  - потенциал.



2) „Двухжидкостная“ модель -  
 уравнения для трёх моментов  
 (плотность, импульс, энергия)  
 функций распределения ~~в~~  
 электронов  $f_e$  и дырок  $f_p$ .

3) Дрейфово-диффузионная модель

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n \vec{v}_n - D_n \nabla n) = G - R,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} (p \vec{v}_p - D_p \nabla p) = G - R,$$

$$\text{div} \epsilon \text{grad} \varphi = -4\pi e (p - n + N),$$

$$\vec{v}_n = +\mu_n \nabla \varphi, \quad \vec{v}_p = -\mu_p \nabla \varphi.$$

$n, p$  - концентрации электронов, дырок,

$\mu_{n,p}$  - коэф. подвижности,

$D_{n,p}$  - „-“ диффузии,

$G - R$  - генерация - рекомбинация,

$N$  - концентрация примесей,

$\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость.



Наиболее универсальный метод  
численного решения уравнений  
кинетической модели —  
метод частиц.



## Слайды:

- 1) распад разрыва
- 2) звезда
- 3) - 5) - отскок
- 6) сетка
- 7) кумулятивная струя
- 8) запылённый поток
- 9) двухступенчатая ударная волна.