Об одной задаче вариационного исчисления

Т. И. Зеленяк, Н. А. Люлько
(Новосибирск)

Рассмотрим классическую вариационную задачу: найти минимум функционала

$$\int_0^1 F(x, y, y_x)\, dx \tag{1}$$

а) в пространстве $C^1[0,1]$ при условии $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$;
б) в пространстве $C^1[0,1]$ при условии $y(0) = \alpha$;
в) в пространстве $C^1[0,1]$.

Положим

$$G(x, v, v_x, v_{xx}) = \frac{d}{dx} F_{v_x}(x, v, v_x) - F_v(x, v, v_x),$$

$$u_t = G(x, u, u_x, u_{xx}). \tag{2}$$

Предполагается, что $F(x, \xi, \eta)$ гладкая функция, $F_{\eta\eta} > 0$, $F > \delta|\eta| - K$, где $\delta > 0$, K — постоянные. Пусть также существует инвариант $\phi(x, \xi, \eta)$ уравнения Эйлера $G(x, v(x), v_x(x), v_{xx}(x)) = 0$, обладающий свойством:

$$\frac{d}{dx}\phi(x, v(x), v_x(x)) \equiv 0$$

для любого регулярного решения $v(x)$ этого уравнения, и удовлетворяющий условию

$$\inf_{0\le x\le 1,\ |\xi|\le N} |\phi(x,\xi,\eta)| = \Theta_N(\eta) \to \infty$$

для каждого N при $|\eta| \to \infty$. Имеет место

Теорема 1. *Для случаев а) и б) существуют начальные данные* $u_0(x) = u(x,0)$ *и соответствующее им решение* $u(x,t)$ *уравнения* (2), *а также решение* $v(x)$ *уравнения Эйлера, доставляющее абсолютный минимум функционалу* (1), *такие, что* $\|u(x,t) - v(x)\|_{C^2[0,1]} \to 0$ *при* $t \to \infty$. *В случае в) справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *указанные функции* $u(x,t)$, $v(x)$ *существуют*;

2) *для функционала* (1) *существует минимизирующая последовательность* $v_n(x)$ *такая,что* $\min\limits_{0\le x\le 1} |v_n(x)| \to \infty$;

3) *утверждения* 1) *и* 2) *реализуются одновременно.*

Для граничных условий, указанных в случае а), существование абсолютного минимума функционала (1) в классе абсолютно непрерывных функций по существу установлено Л.Тонелли [1, стр.370] (его доказательство для случая $F \equiv F(y, y_x)$ легко переносится на рассматриваемый случай а)). Нами предлагается новое доказательство как утверждения Тонелли (случай а)), так и приведенного утверждения для случаев б) и в), основанное на аналоге метода наискорейшего спуска.

Пусть $v(x, x_0, y_0, y_1)$ - решение задачи Коши

$$v|_{x=x_0} = y_0, \quad v_x|_{x=x_0} = y_1 \tag{3}$$

для уравнения Эйлера, записанного в виде

$$v_{xx} = \frac{F_v - F_{xv_x} - v_x F_{vv_x}}{F_{v_x v_x}}.$$

Предположим в дальнейшем, что рассматриваемая задача Коши разрешима в целом, т.е. ее решение $v(x, x_0, y_0, y_1)$ определено для всех x, $x_0 \in [0,1]$, y_0, $y_1 \in (-\infty, +\infty)$ и регулярно.

Будем также предполагать в случае б), что существует гладкая функция $\psi(v)$ такая, что $F_\eta(1, v, \psi(v)) \equiv 0$, а в случае в) дополнительно существование функции $\chi(v)$ такой, что $F_\eta(0, v, \chi(v)) \equiv 0$. Рассмотрим уравнение (2) при граничных условиях:

А) $u(0,t) = \alpha$, $u(1,t) = \beta$;

Б) $u(0,t) = \alpha$, $u_x(1,t) = \psi(u)|_{x=1}$;

В) $u_x(0,t) = \chi(u)|_{x=0}$, $u_x(1,t) = \psi(u)|_{x=1}$.

Обозначим через $M(v)$ множество функций $u_0(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющих граничному условию, соответствующему рассматриваемой вариационной задаче, таких, что $\|u(x,t) - v(x)\|_{C^2[0,1]} \to 0$ при $t \to \infty$, где $u(x,t)$ решение задачи (2), $u(x,0) = u_0(x)$. Имеет место [2]

Теорема 2. *Пусть $v(x)$ доставляет минимум функционалу (1) в одном из рассматриваемых случаев а), б) или в). Тогда $v(x)$ устойчиво по Ляпунову в норме $C^1[0,1]$, как решение соответствующей нестационарой задачи (2). Если $v(x)$ асимптотически устойчиво, то часть $M(v)$ может быть описана с помощью одного из утверждений.*

I. Существуют стационарные решения $v_1(x)$, $v_2(x)$ задачи (2) такие, что

$$T_I = \{u_0 \mid v_1 < u_0 < v_2,\ \text{для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v)$$

II. Существует стационарное решение $v_1(x)$ задачи (2) такое, что

$$T_{II} = \{u_0 \mid v_1 < u_0,\ \text{для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v)$$

III. Существует стационарное решение $v_2(x)$ задачи (2) такое, что

$$T_{III} = \{u_0 \mid u_0 < v_2,\ \text{для } 0 < x < 1\} \cap C^1[0,1] \subset M(v)$$

IY. $T_{IY} = \{u_0 \in C^1[0,1]\} \subset M(v)$.

При этом в случае а) $u_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям А), *в случае б) граничным условиям* Б), *в случае в) граничным условиям* В), *где* $t = 0$.

Приведем утверждение, позволяющее оценить число стационарных решений параболического уравнения (2), удовлетворяющих одному из краевых условий А), Б), В).

Положим $y_1(x,\gamma) = v(x,1,0,\gamma)$, $y_2(x,\gamma) = v(x,1,\gamma,\psi(\gamma))$. Из результатов работы [3, стр.135] следует, что справедлива

Теорема 3. *Пусть нуль является асимптотически устойчивым решением задачи* (2), *для которого выполняется одно из краевых условий* А), Б) *или* В), *и для некоторых значений* $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ *справедливо* $y_1(\xi_i,\gamma_1) = 0$, $y_2(\eta_i,\gamma_2) = 0$, *где* $0 \le \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$, $0 \le \eta_1 < \ldots < \eta_m < 1$. *Тогда существует не менее чем "$n+1$"стационарных решений уравнения* (2) *в случае граничных условий* А), *не менее чем "$m+1$"решений в случае граничных условий* Б) *и не менее чем "m"решений в случае граничных условий* В).

Теоремы 1, 2 и 3 позволяют предложить алгоритм нахождения как абсолютного минимума функционала (1), так и локального сильного экстремума.

На примерах

$$1)\ F = \sqrt{y^2 + y_x^2}, \quad 2)\ F = y^2 + \sqrt{1 + y_x^2},$$

$$3)\ F = \frac{y_x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2 y_x^2}}, \quad 4)\ F = y_x^2 + y^4, \quad 5)\ F = y_x^2 - y^4,$$

$$6)\ F = y_x^2 + \frac{y^2}{1 + y^4}, \quad 7)\ G(x,\xi,\eta,\zeta) = \zeta + \xi \exp(N(\sin^2 x - \xi^2))$$

анализируется роль наложенных в теореме условий.

В случае лагранжианов 1)–3) имеется линейный рост $F(x,y,y_x)$ по y_x, $F_{y_x y_x} > 0$, но не выполнено условие для инвариантов $\phi(x,\xi,\eta)$. Действительно, имеем соответственно

$$1)\ \phi(x,\xi,\eta) = \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad 2)\ \phi(x,\xi,\eta) = \xi^2 + \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

$$3)\ \phi(x,\xi,\eta) = \frac{\eta}{\sqrt{1+x^2\eta^2}}.$$

Рассмотрим задачу (1) в случае а). При $\alpha = 0$, $\beta > 1$ уравнение Эйлера для примеров 2), 3) решения вообще не имеет [4]. Минимизирующие последовательности $z_n(x)$ для этих задач поточечно сходятся к разрывной в точке $x = 1$ функции $z(x)$ так, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\|z_n(x) - z(x)\|_{C[0,1-\varepsilon]} \to 0$. Причем $z(x)$ является решением соответствующего уравнения Эйлера таким, что $z(0) = 0$ и $z_x(1) = +\infty$.

При $\alpha = -1$, $\beta = 1$ уравнение Эйлера для примера 1) решения также не имеет. Минимизирующая последовательность $z_n(x)$ поточечно стремится к 0 для $x \in (0,1)$, хотя минимум функционала (1) равен 2.

В случае примера 4) справедлива теорема 1, хотя соответствующая задача Коши (3) не всегда разрешима в целом.

Для примера 5) не выполнено условие ограниченности снизу лагранжиана, что приводит к отсутствию конечной нижней грани у функционала (1) в случае в). Это видно на последовательности $v_n(x) = n$.

В примере 6) реализуется утверждение 3) из теоремы 1. У соответствующей вариационной задачи (1) в случае в) абсолютный минимум равный нулю достигается на функции $v(x) = 0$, а также существует минимизирующая последовательность $v_n(x) = n$, $F(x, v_n, v_{nx}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 7) [3, стр.146] иллюстрирует теорему 2, показывая, что область притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения задачи (2) может определяться не однозначно.

Так как задача Коши (3) для уравнения

$$v_{xx} = -v \exp(N(\sin^2 x - v^2)$$

разрешима в целом, то найдется достаточно гладкая функция $F(x, \xi, \eta)$ своих переменных такая, что уравнение $G(x, v, v_x, v_{xx}) = 0$ можно считать уравнением Эйлера для соответствующего лагранжиана $F(x, v, v_x)$.

Итак, рассмотрим уравнение (2) с данной функцией G и краевыми условиями $u(-\pi) = 0$, $u(\pi) = 0$.

Доказано, что по любым начальным данным $u_0(x) \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющим условиям согласования, решение этой задачи будет стабилизироваться к стационарному решению. Очевидно, что, в частности, стационарными решениями являются $v(x) = 0$, $v_\pm(x) = \pm \sin x$. Если в качестве начальных данных взять чётную неотрицательную функцию $u_0(x) \geq \pm \sin x$, то можно показать, что соответствующее решение параболической задачи (2) будет стабилизироваться к четному асимптотически устойчивому стационарному решению $\tilde{v}_+(x) > \pm \sin x$, $|x| \neq \pi$. Аналогично устанавливается существование отрицательного четного асимптотически устойчивого решения $\tilde{v}_-(x) < \pm \sin x$, $|x| \neq \pi$. Непосредственно убеждаемся, что линеаризованная на $v(x) = 0$ рассматриваемая задача имеет положительное собственное число, а стационарные решения $v_\pm(x) = \pm \sin x$, наоборот, при достаточно больших $N > 0$ асимптотически устойчивы. Из теоремы 2 вытекает существование стационарных решений $w_1^\pm(x)$, $w_2^\pm(x)$, определяющих границы областей устойчивости стационарных решений $\pm \sin x$, а именно

$$\{u_0 \mid w_1^\pm(x) \leq u_0 \leq w_2^\pm(x)\} \subset M(\pm \sin x)$$

Так как $v(x) = 0$ неустойчивое решение, то в области устойчивости рассматриваемых решений не могут попасть функции, сохраняющие знак, поэтому $w_k^\pm(x)$ обязательно меняют знак.

Из соображений симметрии и того, что $w_1^{\pm}(x) < \pm\sin x < w_2^{\pm}(x)$ для $|x| \neq \pi$, можно считать, что $w_1^{\pm}(x) = -w_2^{\mp}(x)$. Тогда имеем

$$\{u_0 \mid 0 \leq u_0 \leq \tilde{v}_+\} \subset M(\tilde{v}_+), \quad \{u_0 \mid -w_1^+ \leq u_0 \leq \tilde{v}_+\} \subset M(\tilde{v}_+),$$

$$\{u_0 \mid -w_1^- \leq u_0 \leq \tilde{v}_+\} \subset M(\tilde{v}_+),$$

Итак, нижняя граница области притяжения решения $\tilde{v}_+(x)$ определяется с помощью трех неустойчивых стационарных решений задачи (2).

Список литературы

[1] Tonelli L. Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vol.2, Zanichelli, Bologna, 1923.

[2] Акрамов Т.А., Зеленяк Т.И. О числе стационарных решений и областях неустойчивости квазилинейных уравнений параболического типа. Математические проблемы химии, часть I, Новосибирск, 1975, стр. 144-150.

[3] Белоносов В.С.,Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Спецкурс для студентов мат. фак., НГУ, 1975.

[4] Зеленяк Т.И., Люлько Н.А. К вопросу о разрешимости в целом смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений.// Сиб. мат. журнал, 1998, Т.39, N 2, стр. 317-328.

Институт математики СО РАН
zel@math.nsc.ru